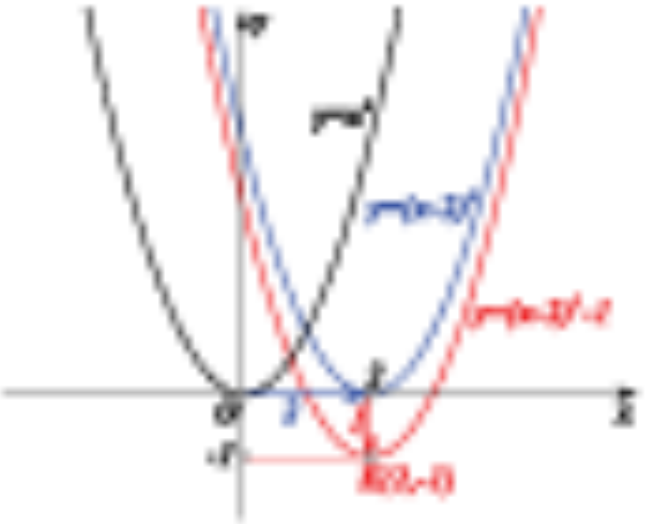
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ
Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ
Χ. ΔΑΝΙΑΝΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ - ΑΘΗΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.
Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α *και* β. Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α *και* β *είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.*

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός « $\alpha = \beta$ *» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «* $\alpha^2 = \beta^2$ *» θα είναι αληθής.*

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» <u>συνεπάγεται</u> τον ισχυρισμό «$\alpha^2 = \beta^2$» και γράφουμε: $a = \beta \Rightarrow a^2 = \beta^2$.

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός «$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$» λέγεται ***συνεπαγωγή*** και πολλές φορές διαβάζεται **«*αν P, τότε Q*».** Ο P λέγεται ***υπόθεση*** της συνεπαγωγής**,** ενώ ο Q λέγεται ***συμπέρασμα*** αυτής[(1)]**.**

---

(1) Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη <u>σύμβαση</u> ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι:

- ✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή <u>δεν ισχύει</u> η συνεπαγωγή $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2 = 3^2$, ενώ $-3 \neq 3$.
- ✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

  $$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

  Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u> και γράφουμε:

  $$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma .$$

Γενικά

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Leftrightarrow Q$ » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται **«P αν και μόνο αν Q».**

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός ***P* ή *Q*** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>ένας τουλάχιστον</u> από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «***P* ή *Q***» λέγεται **διάζευξη** των P και Q.
Για παράδειγμα η εξίσωση

$$\left(x^2 - x\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

- ✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ
- ✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β *είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί* α και β *είναι διάφοροι του μηδενός».*

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός ***P* και *Q*** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>και οι δύο</u> ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός «***P* και *Q***» λέγεται **σύζευξη** των P και Q.

Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x-1) = 0 \text{ και } (x-1)(x+1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. **Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για <u>όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς *α* και *β*. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα *Ψ*.**

1. $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ Α Ψ

2. $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$ Α Ψ

3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$ Α Ψ

4. $\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$ Α Ψ

5. $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$ Α Ψ

6. $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$ Α Ψ

7. $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$ Α Ψ

8. $\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$ Α Ψ

9. $\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$ Α Ψ

II. **Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α΄ με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από τη ομάδα Β΄.**

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x-2)=0$
2	$x(x-2)\neq 0$
3	$x^2=4$
4	$x^2=4$ και $x<0$
5	$x(x-2)=0$ και $x(x-1)=0$
6	$x^2=4$ και $x>0$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x\neq 0$ και $x\neq 2$
Β	$x=2$
Γ	$x=-2$ ή $x=2$
Δ	$x=0$
Ε	$x=0$ ή $x=2$
Ζ	$x=-2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**.
Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

> **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και
- ✓ με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x \in \mathrm{A}$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin \mathrm{A}$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \quad -2 \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$\mathrm{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$\mathrm{B} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου $x > 0$».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα I}\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι».
Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1,\ 2\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-2)=0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο Β έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το Α. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

Γενικά

> Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **Α=Β.**

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \quad \text{και} \quad B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Γενικά

> Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathbf{A \subseteq B}$.
Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.

ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2=-1\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2=-1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Δηλαδή:

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

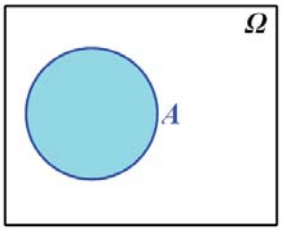
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

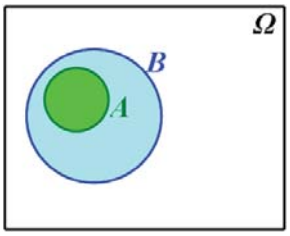
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με **Ω**. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega=\mathbb{R}$.

  Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



- Αν $A\subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.



Πράξεις με σύνολα

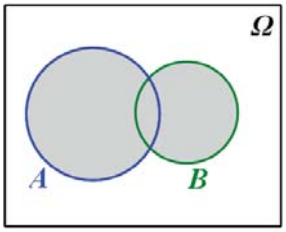
Έστω $\Omega=\{1,2,3,...,10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$$A=\{1,2,3,4\} \quad \text{και} \quad B=\{3,4,5,6\}.$$

- Το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των Α και Β, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα Α και Β λέγεται <u>ένωση</u> των συνόλων Α και Β.

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με $\mathbf{A \cup B}$.



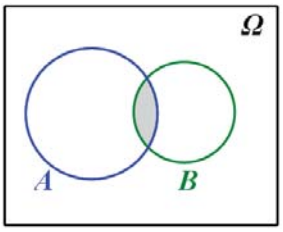
Δηλαδή είναι:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}}$$

- Το σύνολο $\{3,4\}$ που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των Α και Β λέγεται <u>τομή</u> των Α και Β.

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με $\mathbf{A \cap B}$



Δηλαδή είναι:

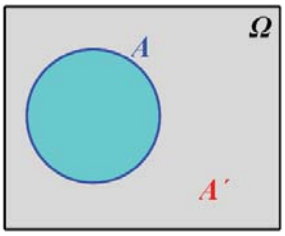
$$\mathbf{A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \varnothing$, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- Το σύνολο $\{5,6,7,8,9,10\}$ που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται <u>συμπλήρωμα</u> του συνόλου Α.

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με **Α΄**.



Δηλαδή είναι:

$$\mathbf{A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. **1.** Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "✓" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;

3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	$-3,5$	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν $A=\{x \in \mathbb{N} | x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ και $B=\{x \in \mathbb{N} | x \text{ διαιρέτης του } 24\}$, τότε:

α) $A \cup B=$..... **β)** $A \cap B=$.....

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του

$$A=\{x \in \Omega | x \text{ φωνήεν}\} \quad \text{και} \quad B=\{x \in \Omega | x \text{ σύμφωνο}\}.$$

Τότε:

α) $A \cup B=$..... **β)** $A \cap B=$..... **γ)** $A'=$..... **δ)** $B'=$.....

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

α) $A \subseteq A \cap B$ **β)** $B \subseteq A \cap B$ **γ)** $A \cap B \subseteq A$ **δ)** $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα A και B. Τότε:

α) $A \subseteq A \cup B$ **β)** $A \cup B \subseteq B$ **γ)** $A \cup B \subseteq A$ **δ)** $A \cup B \subseteq B$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, $\varnothing$ το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Τότε:

α) $\varnothing' =$ …… **β)** $\Omega' =$ …… **γ)** $(A')' =$ …..

2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε

α) $A \cap B =$ …… **β)** $A \cup B =$ …….

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.
Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.
Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσι-

κών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.
Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι (Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.
Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.
Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο

αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.
Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησης τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετριέται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετριέται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2,...,\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα.

Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα A και B είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2,4,6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

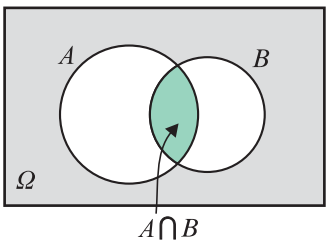
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο Ø που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το Ø είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $A = \{2,4,6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\emptyset) = 0$.

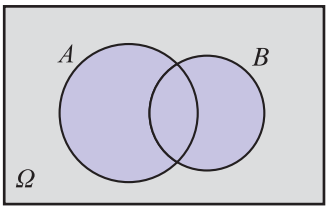
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

• Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.

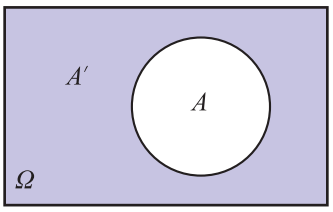


• Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

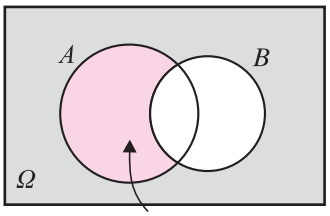


$A \cup B$

• Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".



• Το ενδεχόμενο $A–B$, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



$A - B$

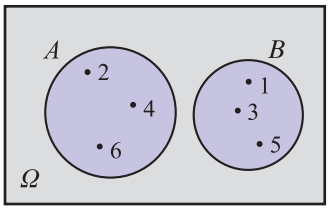
Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{2,4,6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A, $A \cup B$, $A - B$, B' πραγματοποιούνται, ενώ τα A', B, $(A \cup B)'$, $(A - B)$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2,4,6\}$ και $B = \{1,3,5\}$. Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:



$A \cap B = \varnothing$

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.
Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η **Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.**

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1: "Ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ"

A_2: "Ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2"

A_3: "Ο αριθμός των K είναι τουλάχιστον 2"

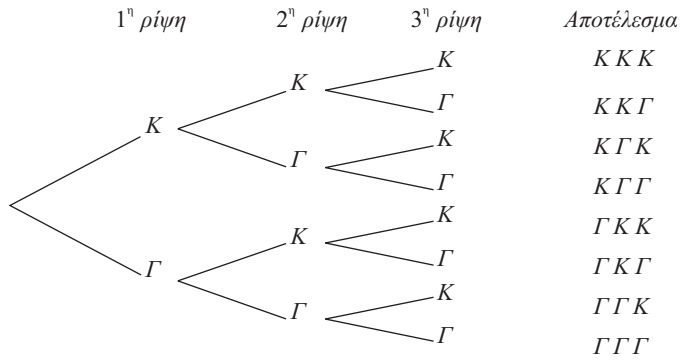
A_4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"

A_5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε K"

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A'_3, $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το K και το $Γ$ και είναι

$$Ω = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ\ ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}.$$

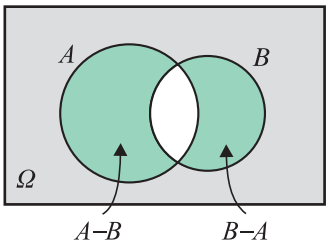
ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο $Ω$ και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$A_1=\{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$
$A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$
$A_3 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$ (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)
$A_4 =\{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$
$A_5 = \{ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\}$.

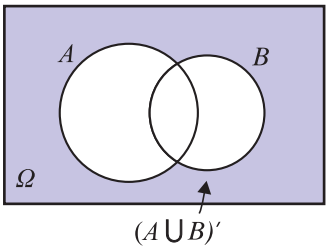
iii) Το A'_3 περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των K είναι μικρότερος από 2. Επομένως, $A'_3 =\{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.
Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς K, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2=\{ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$.
Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν K ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

2η **Δίνονται δύο ενδεχόμενα *A* και *B* ενός πειράματος με δειγματικό χώρο *Ω*. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:**
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα *A* και *B*.
ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα *A* και *B*.

ΛΥΣΗ



i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.
Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A - B$ και $B - A$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη";

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα";

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: "Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της".

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο,

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: "το άτομο επιλέγει παγωτό"

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: "το άτομο επιλέγει ρύζι", να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο *Α*: "η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος",
iii) Το ενδεχόμενο *Β*: "η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια",
iv) Το ενδεχόμενο *Γ*: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος".

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα *Α* και *Β* είναι ασυμβίβαστα:
i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. *Α* είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και *Β* είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. *Α* είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και *Β* το ενδεχόμενο να είναι καθολικός,
iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. *Α* είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και *Β* το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια,
iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. *Α* είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο του να είναι ευρωπαϊκό και *Β* το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησης τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
Α: "Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης".
Β: "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός"
Γ: "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5"
Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεση του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίηση του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A και τον συμβολίζουμε με $P(A)$. Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται *σχετική συχνότητα του A* και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\},..., \{\omega_\lambda)$ πραγματοποιούνται $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες

$f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu},..., f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, \quad i = 1,2,..., \lambda$ (αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$)
2. $f_1 + f_2 + ... + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$

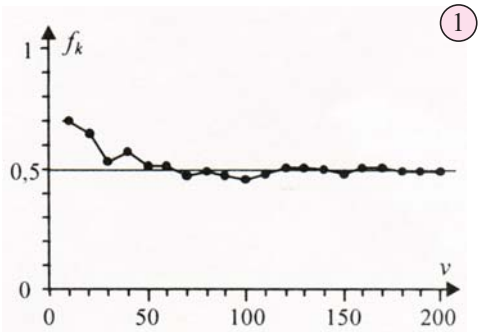
Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με K το αποτέλεσμα "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα "γράμματα".

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των K και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30,...,200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας
ρίψεων ενός νομίσματος

ν	κ	f_κ
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων η σχετική συχνότητα f_κ εμφάνισης της "κεφαλής" σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε "τείνει" στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την "προσδοκία" μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός "αμερόληπτου" νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων $\{K\}$, $\{\Gamma\}$ είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.
Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί.

Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{K\}$, $\{\Gamma\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ και $\{6\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$. Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα $\frac{1}{6}$, η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.

Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$. Γι'αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$

2. $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0\le P(A)\le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1,2,...,\nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1,2,..., \nu$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

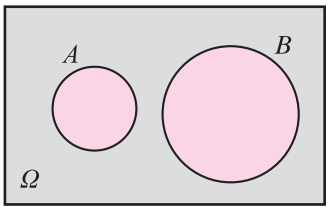
1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$. Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$



$A \cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

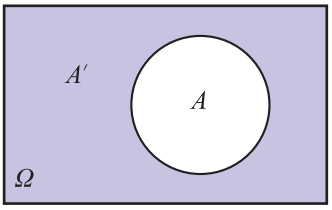
$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \\ P(\Omega) &= P(A) + P(A') \\ 1 &= P(A) + P(A'). \end{aligned}$$

Οπότε $\quad P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

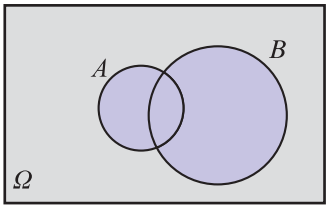
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, (1)

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.



$A \cup B$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

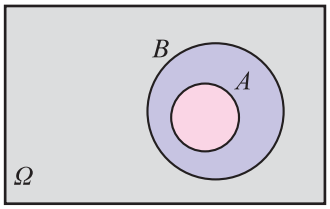
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

Αν $A \subseteq B$,τότε $P(A) \leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$
$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$
$$P(A) \leq P(B)$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

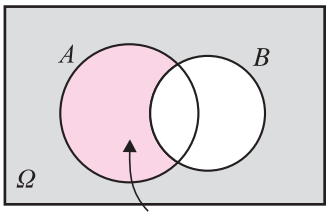
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $\quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$



$A - B$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Ρίχνουμε δύο "αμερόληπτα" ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

• Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα "διπλής εισόδου", όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega) = 36$.

• Το ενδεχόμενο A: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6)(6,5)\}$$

δηλαδή $N(A) = 10$

• Επομένως, $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Αρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\dfrac{5}{18} \approx 0{,}28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

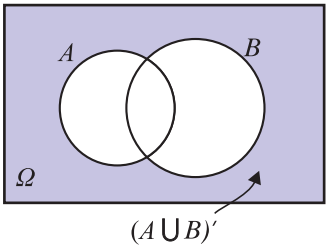
2η Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

ΛΥΣΗ

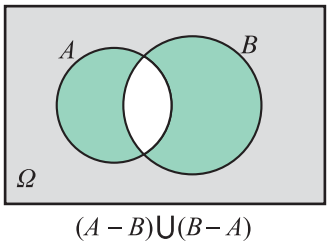
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B είναι το $(A \cup B)'$.

Επομένως

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2) \\ &= 1 - 0{,}7 \\ &= 0{,}3. \end{aligned}$$



ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:



$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0{,}5 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

3η **Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}5$.**

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα,

ii) Να αποδείξετε ότι $0{,}1 \le P(A \cap B) \le 0{,}5$.

ΛΥΣΗ

i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

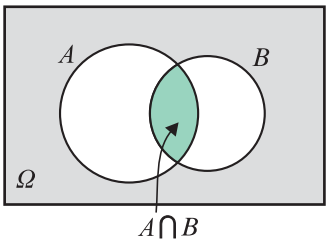
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}5 = 1{,}1$$

ισχύει, δηλαδή, $P\{A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$,έχουμε

$P(A \cap B) \le P(B)$ και $P(A \cap B) \le P(A)$,

επομένως $\quad P(A \cap B) \le 0{,}5 \qquad (1)$



Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap \mathrm{B}).$$

Όμως $P(A \cup B) \leq 1.$

Επομένως: $0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B) \leq 1$

$0{,}6 + 0{,}5 - 1 \leq P(A \cap B)$

$0{,}1 \leq P(A \cap B).$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}1 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο "γράμματα".

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:
i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbf{N} \ / \ 10 \le \omega \le 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega$ πολλαπλάσιο του 3$\}$ και $B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega$ πολλαπλάσιο του 4$\}$. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο A ii) να μην ανήκει στο B.

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$

$P(B) = \frac{7}{15}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$,

$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.Να βρείτε την $P(B)$.

9. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A) = P(B)$, $P(A \cup B) = 0{,}6$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρείτε την $P(A)$.

10. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι
$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
α) τουλάχιστον μία ασθένεια; β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 30% Γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:
i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B
ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

3. Αν $\dfrac{P(A)}{P(A')} = \dfrac{3}{4}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

4. Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4$.

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}7$, να δείξετε ότι $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$.

6. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο "κεφαλές", μια "κεφαλή" και μια "γράμματα", ή δύο "γράμματα", και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά "κεφαλή". Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε "κεφαλή" σε μια ρίψη του νομίσματος είναι $\frac{5}{5} = 1$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.
(α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη "τυχαία";
(β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

(i) $3 \cdot 6$ (ii) 3^6 (iii) 6^3 (iv) $3 \cdot 6^3$.

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

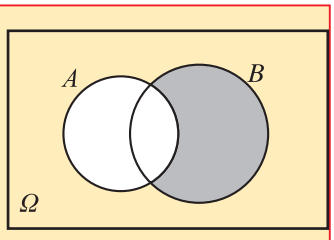
(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4 - 6 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;
(α) 0,2 (β) 0,8 (γ) 0,6 (δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι τέτοια ώστε $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, ποια είναι η $P(A \cup B)$;

(α) 1 (β) $\frac{3}{4}$ (γ) $\frac{1}{4}$ (δ) $\frac{1}{16}$ (ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;
(α)B β) A' (γ) $A - B$ (δ) $B - A$.



(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7 - 9 είναι σωστή ή λάθος.
Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

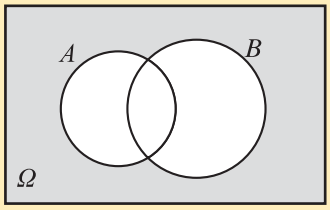
7. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

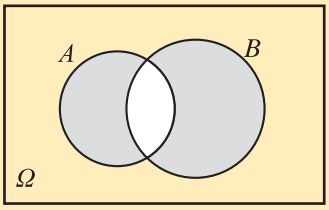
8. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

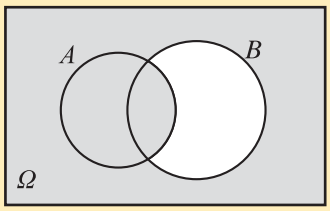
9. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

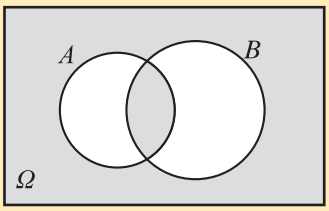
10. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1{,}3$;
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:

i)


ii)


iii)


iv)


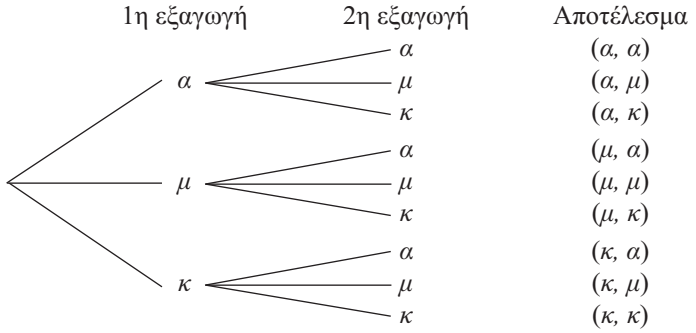
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 1.1. Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε:

i)

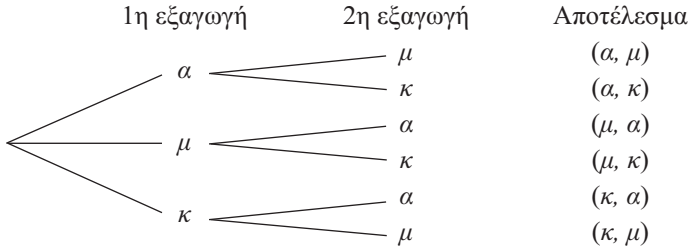


$\Omega = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \mu), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), \kappa, \kappa)\}$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$

iii) $\{(\alpha, \alpha), (\mu, \mu), \kappa, \kappa)\}$.

2. i)



$\Omega = \{(\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$

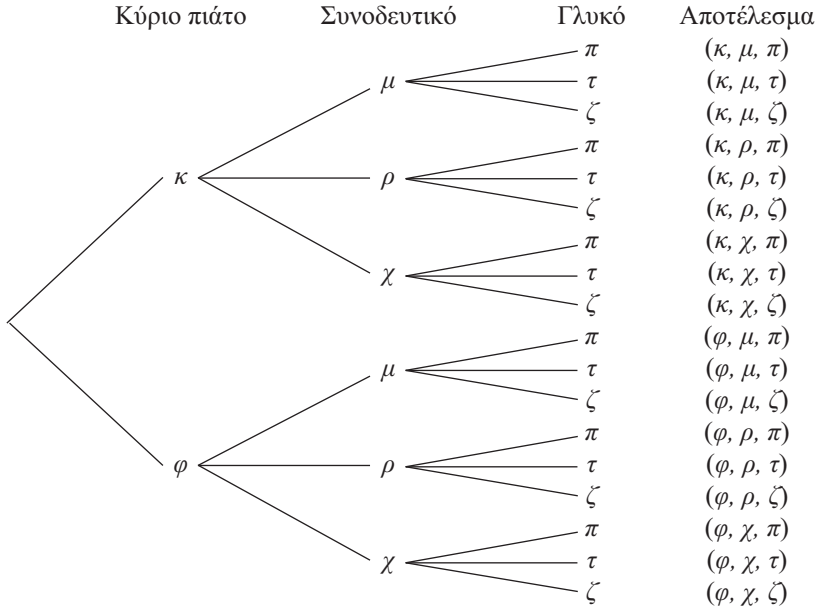
ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu),\}$

iii) $\varnothing$.

3. i) Ω = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

ii) Α = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

4. i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος:

ii) $A = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi), (\varphi, \mu, \pi), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \chi, \pi)\}$

iii) $B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \mu, \tau), (\kappa, \mu, \zeta), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \zeta), (\kappa, \chi, \pi), (\kappa, \chi, \tau), (\kappa, \chi, \zeta)\}$

iv) $A \cap B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi)\}$

v) $\Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \tau), (\kappa, \rho, \zeta), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \rho, \tau), (\varphi, \rho, \zeta)\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi)\}$.

5. i) $\Omega = \{(0, \alpha), (0, \beta), (0, \gamma), (0, \delta), (1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$

ii) $A = \{(0, \gamma), (0, \delta)\}$

iii) $B = \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$

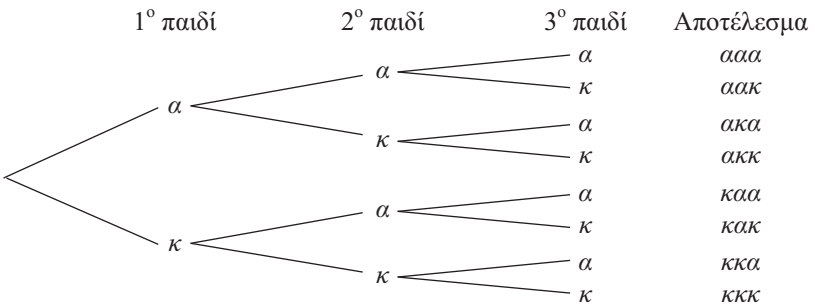
iv) $\Gamma = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$.

6. i) $A = \{3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$.
iv) $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

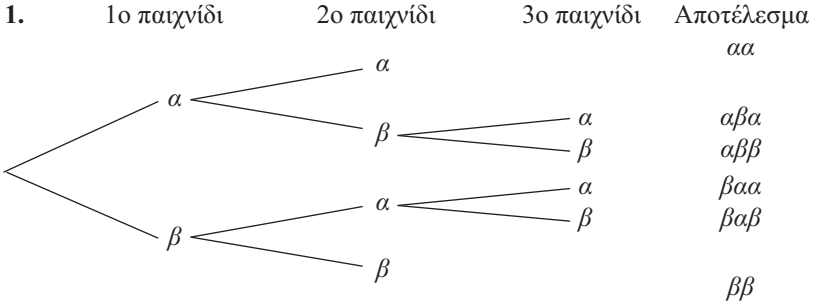
7.



$\Omega = \{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.



$\Omega = \{αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ\}$.

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα
$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$.
$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$.
$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$.
$A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}$.
$A \cap \Gamma = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$.
$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3,1)\}$.

§ 1.2. Έννοια της πιθανότητας
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}$.

ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \mathbf{\frac{12}{13}}$.

2. Αν Γ το αποτέλεσμα "γράμματα" και K το αποτέλεσμα "κεφαλή", ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{K\Gamma, \Gamma K, KK, \Gamma\Gamma\}$ και υπάρχει μια ευνοϊκή περίπτωση η $\Gamma\Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες.

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

4. Η τάξη έχει συνολικά 4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30 μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώ-

σει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{9}{30}}$.

5. Έχουμε $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A = \{12, 15, 18\}$ και $B = \{12, 16, 20\}$. Επομένως

i) $P(A) = \mathbf{\frac{3}{11}}$. ii) Έχουμε $P(B) = \frac{3}{11}$, άρα $P(B') = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

6. Αν Λ, Π και N είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε $P(\Lambda) = \frac{30}{100}$, $P(\Pi) = \frac{20}{100}$ και $P(N) = \frac{40}{100}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(\Lambda \cup \Pi) = P(\Lambda) + P(\Pi) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100}$, δηλαδή **50%**.

ii) $P(\Lambda \cup N)' = 1 - P(\Lambda \cup N) = 1 - P(\Lambda) - P(N) = 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} = \frac{30}{100}$,

δηλαδή **30%**.

7. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$\frac{17}{30} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$
$$P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - \frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{14}{30} - \frac{20}{30} = \mathbf{\frac{11}{30}}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$\frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$2P(A) - 0{,}2 = 0{,}6$$
$$2P(A) = 0{,}8$$
$$\mathbf{P(A) = 0{,}4}.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

11. Έχουμε

$$P(A\cup B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \le P(A) + P(B)$$
$$\Leftrightarrow 0 \le P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \text{ που ισχύει.}$$

12. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V.

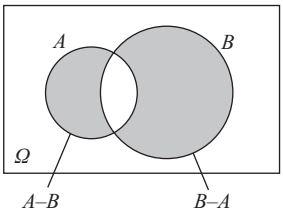
Έχουμε $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{55}{100}$, $P(A\cap B) = \frac{15}{100}$. Επομένως

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100} = \frac{65}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{65\%}.$$

13. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε

$P(A) = \frac{10}{100}$, $P(B) = \frac{6}{100}$ και $P(A\cap B) = \frac{2}{100}$.



α) Έχουμε

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{14\%}.$$

β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A - B)\cup(B - A)$. Τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$$P\big((A - B)\cup(B - A)\big) = P(A - B) + P(B - A)$$
$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) + 2P(A\cap B)$$
$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{4}{100} = \frac{12}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{12\%}.$$

14. Έστω A το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και B το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά.

Έχουμε $P(A) = \frac{80}{100}$, $P(B) = \frac{30}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{20}{100}$.

Άρα
$$\begin{aligned} P\big((A \cup B)'\big) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{80}{100} - \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{10}{100}, \end{aligned}$$
δηλαδή **10%**.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}$

ii) $P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}$

iii)
$$\begin{aligned} P\big((A - B) \cup (B - A)\big) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

2. Αν Α και Β τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι $P(A) = \frac{15}{100}$ και $P(B) = \frac{40}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{10}{100}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:
$$\begin{aligned} P\big((A \cup B)'\big) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left(\frac{15}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100}\right) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}, \end{aligned}$$
δηλαδή **55%**.

3. Έχουμε διαδοχικά
$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4}$$
$$4P(A) = 3 - 3\,P(A)$$
$$7P(A) = 3,$$
$$P(A) = \mathbf{\frac{3}{7}}, \qquad P(A') = 1 - P(A) = \mathbf{\frac{4}{7}}.$$

4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$, όπου $0 < x < 1$.

Έχουμε $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \geq 4$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x(1-x)$$
$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0 \qquad \text{που ισχύει.}$$

5. • Έχουμε

$$A \cap B \subseteq A$$
$$P(A \cap B) \leq P(A)$$
$$P(A \cap B) \leq 0{,}6 \qquad (1)$$

• Έχουμε

$$P(A \cup B) \leq 1$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - 1 \leq P(A \cap B)$$
$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \qquad (2)$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6.$$

6. $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \leq P(A \cap B)$

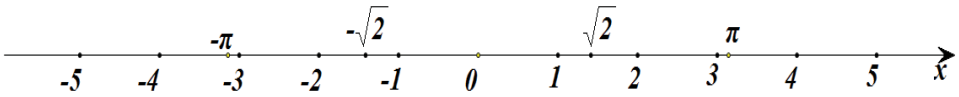
$$\Leftrightarrow P(B) + P(A) - P(A \cap B) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1 \qquad \text{που ισχύει.}$$

2 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ (Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**



Θυμίζουμε ότι:

- ✓ Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
- ✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,
  $\frac{14}{5} = 2,8$, $-\frac{9}{8} = -1,25$, $\frac{60}{11} = 5,\overline{45}$, $2,25 = \frac{225}{100}$ και $2,\overline{32} = \frac{230}{99}$
  Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ., που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους , η αφαίρεση και η διαίρεση.

- Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Στον πίνακα αυτόν, αλλά και στη συνέχεια του βιβλίου, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται παριστάνουν <u>*οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς*</u>, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.

Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης,** διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

ΣΧΟΛΙΟ

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουν ως συνέπεια, κάθε άθροισμα με περισσότερους από δυο προσθετέους, να ισούται με οποιοδήποτε άλλο άθροισμα που σχηματίζεται από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$-3+2+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}+5-2=-3+3+2-2+5+\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\,.$$

Ομοίως, ένα γινόμενο με περισσότερους από δυο παράγοντες ισούται με οποιοδήποτε άλλο γινόμενο που μπορεί να σχηματισθεί από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)4\left(-\frac{5}{2}\right)=(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-6)4=-24$$

(Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι αρκετά πολύπλοκη και παραλείπεται).

- Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)} \quad \textbf{και} \quad \boldsymbol{\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}} \quad \boldsymbol{(\beta \neq 0)}$$

Δηλαδή:
Για να βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Επειδή διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται, όπου στο εξής συναντάμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, εννοείται ότι $\beta \neq 0$ και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα.

- Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4. Αν $\gamma \neq 0$, τότε:
$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν από την ισότητα $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ ή από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma=\beta \cdot \gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha=\beta$, τότε λέμε ότι **διαγράφουμε** τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\alpha=1$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{gathered}\alpha=1\\ \alpha\cdot\alpha=\alpha\cdot 1\\ \alpha^2=\alpha\\ \alpha^2-1=\alpha-1\\ (\alpha+1)(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot 1\\ \alpha+1=1\\ \alpha=0\end{gathered}$$

Όμως έχουμε και $\alpha=1$, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα $(\alpha+1)(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot 1$ διαγράψαμε τον παράγοντα $(\alpha-1)$ ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}},}\qquad \text{για } \boldsymbol{\nu>1} \text{ και}$$

$$\boldsymbol{\alpha^{1}=\alpha,}\qquad \text{για } \boldsymbol{\nu=1.}$$

Αν επιπλέον είναι $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, τότε ορίσαμε ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^{0}=1}\qquad \text{και}\qquad \boldsymbol{\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2=2^2$, αλλά $-2\neq 2$.

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα.**

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι γνωστές μας πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

Μέθοδοι απόδειξης

1η) Ευθεία Απόδειξη

Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha+\beta+\gamma=0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$\text{« Αν } \alpha+\beta+\gamma=0, \text{ τότε } \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \text{ ».}$$

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$, είναι $\alpha=-(\beta+\gamma)$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= \left[-(\beta+\gamma)\right]^3+\beta^3+\gamma^3 \\
&= -(\beta+\gamma)^3+\beta^3+\gamma^3 \\
&= -\beta^3-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3+\beta^3+\gamma^3 \\
&= -3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2 \\
&= -3\beta\gamma(\beta+\gamma) \\
&= 3\alpha\beta\gamma, && (\text{αφού } \beta+\gamma=-\alpha).
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma=0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη**.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο) Ευθεία απόδειξη χρησιμοποιήσαμε και στο Γυμνάσιο για την απόδειξη των γνωστών μας ταυτοτήτων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, με $\alpha,\beta\in R$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) && [\text{Ορισμός δύναμης}] \\
&= \alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta) && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 && [\text{Αναγωγή όμοιων όρων}]
\end{aligned}$$

2ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy+\beta^2x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2,$$ που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.
Έτσι ο ισχυρισμός

«για κάθε $\alpha>0$ *ισχύει* $\alpha^2>\alpha$*»*

δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha=\frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2=\frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2<\alpha$.

2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος»,

δηλαδή

«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha=2\kappa+1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\left(2\kappa+1\right)^2\\&=4\kappa^2+4\kappa+1\\&=2\left(2\kappa^2+2\kappa\right)+1\\&=2\lambda+1 \qquad (\text{όπου } \lambda=2\kappa^2+2\kappa).\end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2=2\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα **ο α είναι άρτιος**.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο.**

Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται **απαγωγή σε άτοπο.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$ (εφόσον $\beta\delta\neq 0$)

ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}$ (εφόσον $\beta\gamma\delta\neq 0$)

iii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$ (εφόσον $\beta\delta\neq 0$)

iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (εφόσον $\beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Για $\beta\delta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \beta\delta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\beta\delta\cdot\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma.$$

ii) Για $\beta\gamma\delta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma\Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}.$$

iii) Για $\beta\delta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

iv) Για $\beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$, αν θέσουμε $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\lambda$, έχουμε:

$\alpha=\lambda\beta$ και $\gamma=\lambda\delta$, οπότε $\alpha+\gamma=\lambda(\beta+\delta)$.

Επομένως, $\lambda=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, δηλαδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

2η Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου *κ, λ* είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

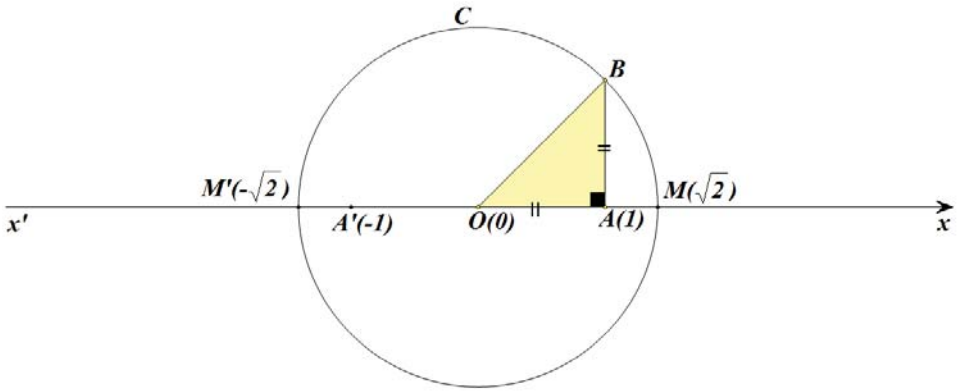
$$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$
$$2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$
$$\kappa^2=2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 25) και ο *κ* είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής $\kappa=2\mu$.
Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2=2\lambda^2$$
$$(2\mu)^2=2\lambda^2$$
$$4\mu^2=2\lambda^2$$
$$\lambda^2=2\mu^2$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο *λ* είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι *κ, λ* είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ **δεν είναι ανάγωγο** (άτοπο).



Στο σημείο *Α* του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα *ΑΒ* με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου *ΟΑΒ* έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το *Ο* και ακτίνα $OB=\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία *Μ* και *Μ'* που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παράσταση $A=\left[\left(x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(xy^3\right)^4\right]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$.

i) Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\left[\left(xy^{-1}\right)^2:\left(x^3y^7\right)^{-1}\right]^2$ για $x=0,4$ και $y=-2,5$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) 1001^2-999^2 **ii)** $99\cdot 101$ **iii)** $\frac{(7,23)^2-(4,23)^2}{11,46}$.

4. **i)** Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2.$$

5. **i)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=1$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1,3265)^2-0,3265\cdot 2,3265.$$

6. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμα τους.

7. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu}+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$ **ii)** $\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\left(\alpha+1\right)^3}$ **ii)** $\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $\left(x+y\right)^2\cdot\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2}$ **ii)** $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

4. Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right)=1$.

5. Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

ii) Αν $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha$.

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L=4\alpha$ και εμβαδόν $E=\alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha+\beta$ άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha\neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha\cdot\beta$ άρρητος.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, όταν η διαφορά $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\boldsymbol{\beta < \alpha}$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$$

Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$ και διαβάζουμε: **«*α* μεγαλύτερος ή ίσος του *β*»**.

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

- $$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$
  $$(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

- $$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$
  $$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι } \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

- $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
  (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0}$$

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0}$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2.
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς *α, β, γ, δ* ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και...και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu$

✓ Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι **θετικοί** αριθμοί, τότε:
$(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και...και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_\nu$ (*)

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4. Για <u>θετικούς</u> αριθμούς *α, β* και <u>θετικό ακέραιο</u> *ν* ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $\alpha > \beta$. Τότε, από τη (*), για

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha > 0 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\nu = \beta > 0,$$

  προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.

- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha \le \beta$. Τότε:
  - ✓ αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
  - ✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

  Άρα, $\alpha > \beta$.

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Για <u>θετικούς</u> αριθμούς *α, β* και <u>θετικό ακέραιο</u> *ν* ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.

- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \ne \beta$. Τότε:
  - ✓ αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
  - ✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha = \beta$.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$10 > 6 \text{ και } 7 > 2, \text{ αλλά } 10 - 7 < 6 - 2 .$$

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$24 > 10 \text{ και } 6 > 2, \text{ αλλά } \frac{24}{6} < \frac{10}{2}.$$

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \le x \le \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με (α, β).

Οι αριθμοί α και β λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

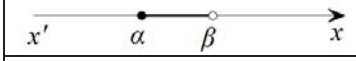
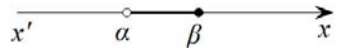
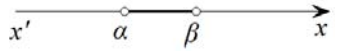
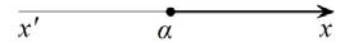
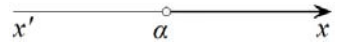
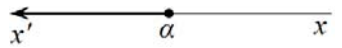
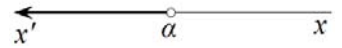
- ✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα $[\alpha, \beta)$** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x < \beta$ και
- ✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα $(\alpha, \beta]$** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \le \beta$.

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x$ συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$, ενώ
- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \le \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \alpha)$. Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \le x \le \beta$	$[\alpha,\ \beta]$
	$\alpha \le x < \beta$	$[\alpha,\ \beta)$
	$\alpha < x \le \beta$	$(\alpha,\ \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	$(\alpha,\ \beta)$
	$x \ge \alpha$	$[\alpha,\ +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha,\ +\infty)$
	$x \le \alpha$	$(-\infty,\ \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty,\ \alpha)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθεί ότι :

i) **Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$**

ii) **Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$**

iii) **Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε $\alpha\beta > 0$. Επομένως ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

ii) Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \ge 0, \text{ που ισχύει}$$

iii) Έχουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \ge 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \ge 0, \text{ που ισχύει.}$$

2η Αν $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ και $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$, να αποδειχθεί ότι:

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ έχουμε διαδοχικά:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right) < 8x < 8 \cdot \frac{3}{4}$$

$$-4 < 8x < 6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$ έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right) < 12y < 12 \cdot \frac{5}{6}$$

$$-8 < 12y < 10$$

$$8 > -12y > -10$$

$$-10 < -12y < 8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14 < 8x - 12y < 14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14 + 3 < 8x - 12y + 3 < 14 + 3$$

Άρα

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ **ii)** $2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq \left(\alpha + \beta\right)^2$

2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$ **ii)** Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

4. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x+y$ **ii)** $x-y$ **iii)** $\frac{x}{y}$ **iv)** x^2+y^2

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν Αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

i) της περιμέτρου **ii)** του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0 \le \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$.

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Έστω $x > 5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$x > 5$$
$$5x > 25$$
$$5x - x^2 > 25 - x^2$$
$$x(5-x) > (5+x)(5-x)$$
$$x > 5+x$$
$$0 > 5.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \ge 4$.

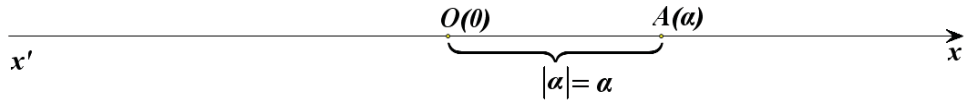
4. Να αποδείξετε ότι:

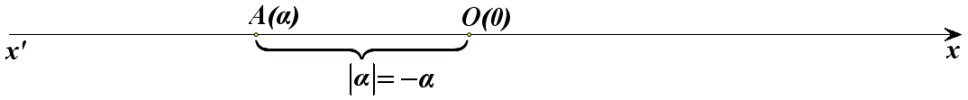
i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$ **ii)** $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου A από την αρχή O, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και την συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2| = 2$, $\left|\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ και γενικά: $|\alpha| = \alpha$, **για κάθε** $\alpha > 0$.

  Δηλαδή:
  Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2| = 2$, $\left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ και γενικά: $|\alpha| = -\alpha$, **για κάθε** $\alpha < 0$.

  Δηλαδή:
  Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$.

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:
- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2\le\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\le|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\le\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\le|\alpha\beta|\text{, που ισχύει.}$$

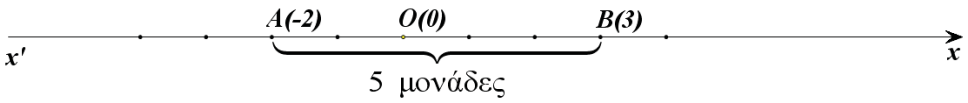
Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta=|\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta\ge0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:
$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu|=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_\nu|$$
Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu=\alpha$, έχουμε:
$$|\alpha^\nu|=|\alpha|^\nu$$
- Η ανισότητα $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:
$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

Απόσταση δυο αριθμών

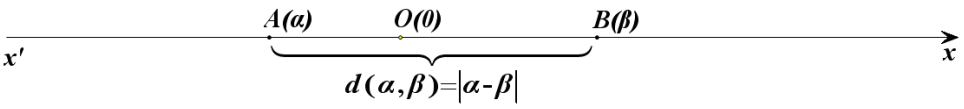
- Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους -2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως.



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών -2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB)=5=|(-2)-3|=|3-(-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως.

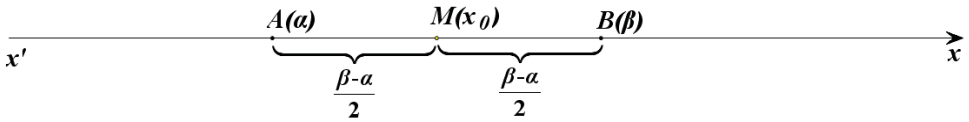


Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Είναι δηλαδή:

$$\boxed{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$$

Προφανώς ισχύει $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\alpha<\beta$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $\beta-\alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha,\ \beta]$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ και ας ονομάσουμε A και B τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



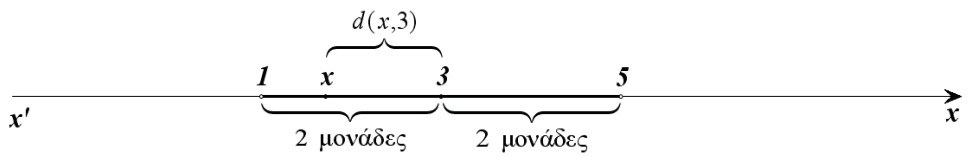
Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος AB, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(MA)=(MB) &\Leftrightarrow d(x_0,\alpha)=d(x_0,\beta)\\ &\Leftrightarrow |x_0-\alpha|=|x_0-\beta|\\ &\Leftrightarrow x_0-\alpha=\beta-x_0, \qquad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ \alpha<x_0<\beta)\\ &\Leftrightarrow 2x_0=\alpha+\beta\\ &\Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ που αντιστοιχεί στο μέσον M του τμήματος AB λέγεται **κέντρο** του διαστήματος $[\alpha,\ \beta]$, ενώ ο αριθμός $\boldsymbol{\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}}$ λέγεται **ακτίνα** του $[\alpha,\ \beta]$.

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων $(\alpha,\ \beta)$, $[\alpha,\ \beta)$ και $(\alpha,\ \beta]$ ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος $[\alpha,\ \beta]$.

- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-3|<2$.



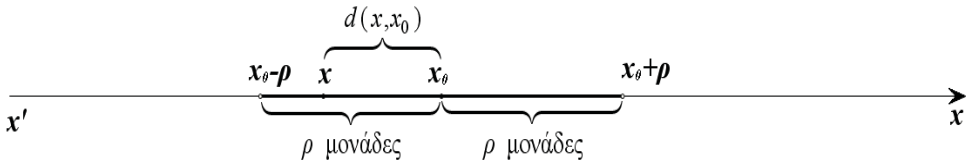
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned} |x-3|<2 &\Leftrightarrow d(x,3)<2 \\ &\Leftrightarrow 3-2<x<3+2 \\ &\Leftrightarrow x\in(3-2,\ 3+2) \end{aligned}$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:
> $$\begin{aligned} |x-x_0|<\rho &\Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,\ x_0+\rho) \\ &\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x-x_0|<\rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



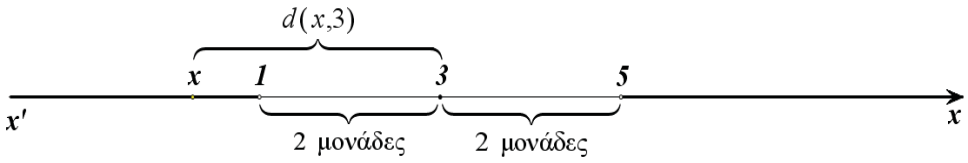
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0=0$, έχουμε:

$$|x|<\rho \Leftrightarrow x\in(-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow -\rho<x<\rho\,.$$

Για παράδειγμα,

$$|x|<2 \Leftrightarrow x\in(-2,\ 2) \Leftrightarrow -2<x<2\,.$$

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-3|>2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

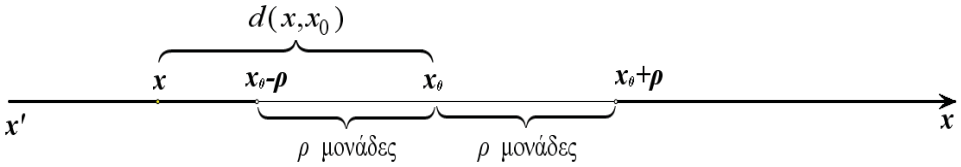
$$\begin{aligned} |x-3|>2 &\Leftrightarrow d(x,3)>2 \\ &\Leftrightarrow x<3-2 \text{ ή } x>3+2 \\ &\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ 3-2)\cup(3+2,\ +\infty)\,. \end{aligned}$$

Γενικά:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία $M(x)$ του άξονα $x'x$ που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ **ii)** $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$ **iv)** $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$ **ii)** $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37*dm*. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005*dm*. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-4\rvert \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2, 6]$
$\lvert x+3\rvert < 4$		
$\lvert x-4\rvert > 2$		
$\lvert x+3\rvert \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \le |\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι:

i) $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **ii)** $\beta = \dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:

i) Η ισότητα $|x|+|y|=0$; **ii)** Η ανισότητα $|x|+|y|>0$;

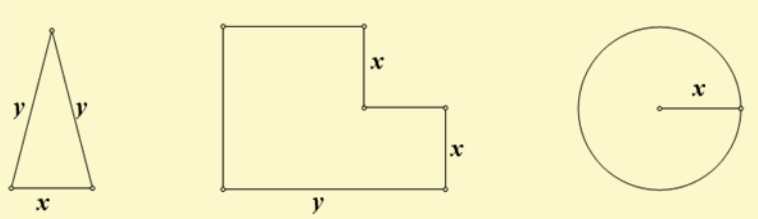
4. Έστω $0<\alpha<\beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\alpha}.$$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο αριθμός $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x-2|<0{,}1$ και $|y-4|<0{,}2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

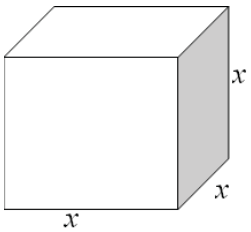
Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

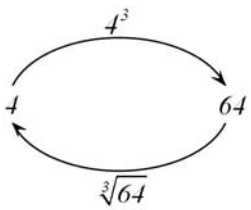
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$.



Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος



αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64}$ =4. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού.

Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για **κάθε θετικό ακέραιο *ν***, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[1] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \text{ και } \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}.$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|.$$

[1] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός.

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6} = 2, \quad \text{ενώ} \quad \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2 .$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \alpha \cdot \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \qquad \text{που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha, \qquad \text{που ισχύει.}$$

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\kappa = \alpha \geq 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa ,$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για $\alpha, \beta \geq 0$ έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} .$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $\left(\alpha^p\right)^q = a^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^2$. Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\boldsymbol{a > 0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $\boldsymbol{0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0}$.

Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \qquad \text{και} \qquad 27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4} .$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα είναι:

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7} .$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \beta, \qquad \text{που ισχύει.}$$

2η Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ **`ii)** $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1}$ **iii)** $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

ii) $$\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}.$$

iii) $$\frac{10}{\sqrt{5}-1} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}.$$

iv) $$\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5} = 3\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right).$$

3η Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = 10.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = 10^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 40^{\frac{1}{6}} = (2\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^3\cdot 5\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^1\cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2\cdot 5 = 10$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[4]{0,0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

i) $\sqrt{(\pi-4)^2}$ **ii)** $\sqrt{(-20)^2}$ **iii)** $\sqrt{(x-1)^2}$ **iv)** $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

3. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=1$.

4. Να αποδείξετε ότι: $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=-8$.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\cdot\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)=-14$.

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\cdot\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right)=31$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$ **ii)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$ **ii)** $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[12]{3}$ **ii)** $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$

iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=25\cdot\sqrt{5}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=10$ **ii)** $\dfrac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=18$.

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ **ii)** $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **iii)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

11. Να αποδείξετε ότι

i) $\dfrac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}}=16$ **ii)** $\sqrt{\dfrac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^{6}}}=3$,

αφού αναλύσετε τα υπόριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+\sqrt{6}$

ii) Αν $\alpha,\ \beta>0$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}\ .$$

2. **i)** Να βρείτε τα αναπτύγματα των $\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$ και $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=6$.

3. **i)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι

i) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$ **ii)** $\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=8\sqrt{3}$.

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB=\sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma=\sqrt{\beta}$.

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\ .$$

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής <u>για όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς *α*, *β*, *γ* και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα *Ψ*.

1. $(\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta)\Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$. Α Ψ

2. Αν $\alpha^2=\alpha\beta$, τότε $\alpha=\beta$. Α Ψ

3. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$. Α Ψ

4. Το άθροισμα $\alpha+\beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός Α Ψ

5. Το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός. Α Ψ

6. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha-\gamma>\beta-\delta$. Α Ψ

7. Αν $\alpha^2>\alpha\beta$, τότε $\alpha>\beta$. Α Ψ

8. Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\alpha>\beta$. Α Ψ

9. Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha>-\beta$, τότε $\alpha>0$. Α Ψ

10. Αν $\alpha>\frac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha>1$. Α Ψ

11. Αν $\alpha<\beta<0$, τότε $\alpha^2>\beta^2$. Α Ψ

12. Αν $\alpha>-2$ και $\beta>-3$, τότε $\alpha\beta>6$. Α Ψ

13. Αν $\alpha<-2$ και $\beta<-3$, τότε $\alpha\beta>6$. Α Ψ

14. $4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2\geq 0$. Α Ψ

15. $(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2>0$. Α Ψ

16. $(\alpha^2-1)^2+(a+1)^2>0$. Α Ψ

17. $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha=\beta=0$. Α Ψ

18. Αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$, τότε $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$. Α Ψ

19. Αν $\alpha^2=\beta$, τότε $\alpha=\sqrt{\beta}$. Α Ψ

20. $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$. Α Ψ

21. Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$. Α Ψ

22. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$. Α Ψ

23. Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$. Α Ψ

24. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$. Α Ψ

25. Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$. Α Ψ

26. Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$. Α Ψ

27. $5^{25} > 25^5$. Α Ψ

28. $11^{22} > 22^{11}$. Α Ψ

ΙΙ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $2 < x < 5$ τότε η παράσταση $|x-2| + |x-5|$ είναι ίση με:

Α) $2x-7$ Β) $7-2x$ Γ) -3 Δ) 3.

2. Αν $10 < x < 20$ τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{|x-10|}{x-10} + \dfrac{|x-20|}{x-20}$ είναι ίση με:

Α) 2 Β) -2 Γ) 10 Δ) 0.

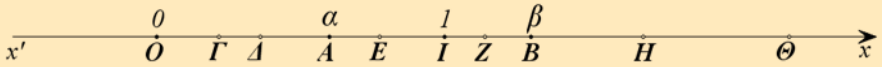
3. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:

Α) $\alpha < \beta < \gamma$ Β) $\alpha < \gamma < \beta$ Γ) $\gamma < \alpha < \beta$ Δ) $\beta < \gamma < \alpha$.

4. Ο αριθμός $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

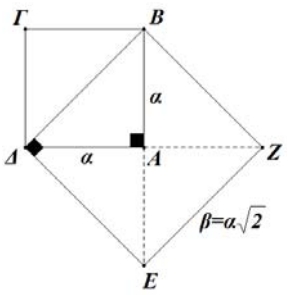
Α) $3 + 2\sqrt{5}$ Β) $3 + 2\sqrt[4]{5}$ Γ) $2 + \sqrt{5}$ Δ) $2 + \sqrt[4]{5}$.

ΙΙΙ. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία *Ο, Ι, Α* και *Β* παριστάνουν τους αριθμούς *0, 1, α* και *β* αντιστοίχως, με $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$, ενώ τα σημεία *Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* και *Θ* παριστάνουν του αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2, β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με την σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία *Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* και *Θ* με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Ο « διπλασιασμός του τετραγώνου», δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός άλλου δοθέντος τετραγώνου, μπορεί να γίνει με μια απλή «γεωμετρική» κατασκευή. Λέγοντας «γεωμετρική» κατασκευή εννοούμε κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.

Ωστόσο, η πλευρά β, του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδό, δεν προκύπτει από την πλευρά α με πολλαπλασιασμό επί ρητό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δυο αυτά τμήματα, πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου.

Η απόδειξη της ύπαρξης άρρητων αριθμών θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων. (Πυθαγόρας: $6^{ος}$ π. Χ. αιώνας).

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια βαθειά πίστη ότι πάντοτε δυο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέτρο. Γι' αυτό, στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη αυτή των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά και μόνο μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και τη φύση.

Ήταν κεντρική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος γύρω στα 450 π.Χ., έγραφε:

«Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό (δηλαδή φυσικό). Αλλιώς θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με τη λογική. Το ένα είναι η αρχή του παντός».

Η ανακάλυψη λοιπόν ότι υπάρχουν μεγέθη και μάλιστα απλά , όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών, θεωρήθηκε αληθινή συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Χαρακτηριστικοί είναι οι θρύλοι που περιβάλλουν το γεγονός αυτό. Κατά έναν από αυτούς, η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών έγινε από τον πυθαγόρειο Ίπασσο, όταν αυτός και άλλοι Πυθαγόρειοι ταξίδευαν με πλοίο. Η αντίδραση των Πυθαγορείων ήταν να πνίξουν τον Ίπασσο και να συμφωνήσουν μεταξύ τους να μη διαδοθεί η ανακάλυψη προς τα έξω.

Η υπέρβαση των «δυσκολιών» που φέρνει στα Μαθηματικά η ύπαρξη άρρητων αριθμών, κατέστη δυνατή από τον Εύδοξο (360π.Χ.) με την ιδιοφυή «θεωρία των Λόγων». Η απόδειξη για το ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι άρρητος είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πολλές φορές πολύπλοκούς συλλογισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

(i) $A = \dfrac{\left(xy^3\right)^4}{\left(x^2y^3\right)^2} : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \dfrac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = \left(x\,y\right)^9$

(ii) Για x = 2010 και $y = \dfrac{1}{2010}$ έχουμε x y = 1 οπότε

$A = 1^9 = 1.$

2. Έχουμε $A = \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 : \dfrac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\dfrac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = \left(x^5 \cdot y^5\right)^2 = \left(xy\right)^{10}$

Για x = 0,4 και y = –2,5 είναι xy = –1 οπότε $A = (-1)^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)\,(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4.000.$

ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)\,(100 + 1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9.999.$

iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46} = \dfrac{(7{,}23 + 4{,}23)(7{,}23 - 4{,}23)}{11{,}46} = \dfrac{11{,}46 \cdot 3}{11{,}46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4\,\frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 = 1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για $\alpha = 1{,}3265$ η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω ν και ν + 1 δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:
Τότε έχουμε

$$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1 - \nu)(\nu + 1 + \nu) = (\nu + 1) + \nu$$

7. Ισχύει

$$2^\nu + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2} = 2^\nu (1 + 2 + 2^2) = 2^\nu \cdot 7$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

i) $$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

ii) $$\frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

2. Έχουμε

i) $$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3}$$

$$= \frac{(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2$$

ii) $$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

3. Έχουμε

i) $$(x + y)^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{y + x}{x\,y}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{x\,y}{x + y}\right)^2 = (x\,y)^2 = x^2 y^2$$

ii) $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{\frac{y+x}{xy}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$$

4. Έχουμε

$$\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)=\frac{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{(x-y)\,(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=1$$

5. i) <u>α΄ τρόπος:</u> Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>β΄ τρόπος:</u> Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\quad \beta=k\gamma\quad \text{και}\quad \gamma=k\alpha \tag{1}$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k=1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).
Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

<u>γ΄ τρόπος:</u> Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε
$\alpha\beta\gamma=k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k=1$.
Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>Σχόλιο:</u> Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ii) α΄ τρόπος: Έχουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ (1) και $\alpha - \beta = \gamma - \alpha$ (2), οπότε, αν προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\alpha - 2\beta = \beta - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Έτσι, από την ισότητα (1) βρίσκουμε ότι και $\beta = \gamma$. Άρα $\alpha = \beta = \gamma$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = k$, οπότε έχουμε

$$\alpha - \beta = k, \quad \beta - \gamma = k \text{ και } \gamma - \alpha = k \qquad (2)$$

Αν τώρα προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (2), βρίσκουμε ότι $k = 0$, οπότε, λόγω των ισοτήτων αυτών, είναι $\alpha = \beta = \gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

6. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε θα ισχύει

$$L = 2x + 2y \quad \text{και} \quad E = xy$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα έχουμε

$$2x + 2y = 4\alpha \quad \text{και} \quad xy = \alpha^2$$

και άρα

$$y = 2\alpha - x \quad (1) \quad \text{και} \quad xy = \alpha^2 \quad (2)$$

Λόγω της (1), η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$x(2\alpha - x) = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha x - x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

Έτσι από την (1) έχουμε ότι και $y = \alpha$ και άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.

ii) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \dfrac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ (ως πηλίκο ρητών), που είναι άτοπο.

§ 2.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii) Είναι $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

2. Έχουμε $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

3. i) Ισχύει $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ και $y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ και $y = -1$.

ii) Έχουμε $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ και $y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ και $y = -2$.

4. i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad 5{,}3 < y < 5{,}4$$

οπότε έχουμε

$$4{,}5 + 5{,}3 < x + y < 4{,}6 + 5{,}4$$

δηλαδή $9{,}8 < x + y < 10$.

ii) Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει

$$-5{,}4 < -y < -5{,}3$$

και προσθέτουμε κατά μέλη με την $4{,}5 < x < 4{,}6$

οπότε έχουμε

$$4{,}5 - 5{,}4 < x - y < 4{,}6 - 5{,}3 \Leftrightarrow -0{,}9 < x - y < -0{,}7.$$

iii) Ισχύει $5{,}3 < y < 5{,}4$ οπότε

$$\frac{1}{5{,}3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5{,}4} \Leftrightarrow \frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3}$$

και άρα $4{,}5 \cdot \frac{1}{5{,}4} < x \cdot \frac{1}{y} < 4{,}6 \cdot \frac{1}{5{,}3} \Leftrightarrow \frac{45}{54} < \frac{x}{y} < \frac{46}{53}$

iv) Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο οπότε έχουμε

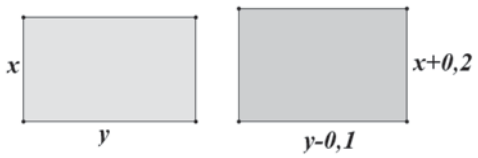
$$(4{,}5)^2 < x^2 < (4{,}6)^2 \Leftrightarrow 20{,}25 < x^2 < 21{,}16 \text{ και}$$

$$(5{,}3)^2 < y^2 < (5{,}4)^2 \Leftrightarrow 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$$

προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$20{,}25 + 28{,}09 < x^2 + y^2 < 21{,}16 + 29{,}16 \Leftrightarrow 48{,}34 < x^2 + y^2 < 50{,}32.$

5.



Για το x έχουμε:

$$2 + 0{,}2 < x + 0{,}2 < 3 + 0{,}2 \Leftrightarrow 2{,}2 < x + 0{,}2 < 3{,}2, \quad (1)$$

Για το y έχουμε:

$$3 - 0{,}1 < y - 0{,}1 < 5 - 0{,}1 \Leftrightarrow 2{,}9 < y - 0{,}1 < 4{,}9, \quad (2)$$

(i) Η περίμετρος τότε γίνεται

$$\Pi = 2(x + 0{,}2) + 2(y - 0{,}1) = 2(x + y + 0{,}1)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $5{,}1 < x + y + 0{,}1 < 8{,}1$ οπότε

$$2 \cdot 5{,}1 < 2(x + y + 0{,}1) < 2 \cdot 8{,}1 \Leftrightarrow 10{,}2 < \Pi < 16{,}2.$$

(ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται

$$E = (x + 0{,}2)(y - 0{,}1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε

$$2{,}2 \cdot 2{,}9 < (x + 0{,}2)(y - 0{,}1) < 3{,}2 \cdot 4{,}9 \Leftrightarrow 6{,}38 < E < 15{,}68.$$

6. Επειδή $(1 + \alpha)(1 + \beta) > 0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)(1+\beta) < \frac{\beta}{1+\beta}(1+\alpha)(1+\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad \text{που ισχύει.}$$

7. Ισχύει $5 - x < 0$ οπότε κατά την απλοποίησή του η ανισότητα αλλάζει φορά. Έτσι το σωστό είναι

$$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x) \Leftrightarrow x < 5 + x \Leftrightarrow 0 < 5, \quad \text{που ισχύει.}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή οι α, β, γ είναι θετικοί, έχουμε

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta > \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma > \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad \text{που ισχύει.}$$

ii) Ομοίως

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta < \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma < \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$\Leftrightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$, που ισχύει.

2. Ισχύει $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - \alpha\beta - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) - (1 - \beta) > 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, που ισχύει, αφού $\alpha > 1$ και $\beta < 1$.

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

4. i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

§ 2.3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $|\pi - 3| = \pi - 3$, αφού $\pi > 3$.

ii) $|\pi - 4| = 4 - \pi$, αφού $\pi < 4$.

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi| = \pi - 3 + 4 - \pi = 1$.

iv) $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 0$

2. Είναι $|x - 3| = x - 3$, αφού $x > 3$ και $|x - 4| = 4 - x$, αφού $x < 4$ οπότε $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 + 4 - x = 1$.

3. i) Αν $x < 3$, τότε ισχύει και $x < 4$, οπότε $x - 3 < 0$ και $4 - x > 0$.
Άρα είναι $|x - 3| - |4 - x| = (3 - x) - (4 - x) = 3 - x - 4 + x = -1$.

ii) Αν $x > 4$, τότε είναι και $x > 3$, οπότε $x - 4 > 0$ και $x - 3 > 0$.
Άρα έχουμε $|x - 3| - |4 - x| = x - 3 + (4 - x) = 1$.

4. Είναι $\dfrac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} = \dfrac{|\beta - \alpha|}{|\beta - \alpha|} = 1$.

5. • Αν x > 0 και y > 0, τότε $A = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1 + 1 = 2$

• Αν x > 0 και y < 0, τότε $A = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0$

• Αν x < 0 και y < 0, τότε $A = \frac{-x}{x} - \frac{y}{y} = -1 - 1 = -2$

• Αν x < 0 και y > 0, τότε $A = \frac{-x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0.$

6. i) Ισχύει $d(2{,}37, D) \leq 0{,}005$ (1)

ii) Ισχύει (1) $\Leftrightarrow |2{,}37 - D| \leq 0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}37 - 0{,}005 \leq D \leq 2{,}37 + 0{,}005$

$\Leftrightarrow 2{,}365 \leq D \leq 2{,}375.$

7.

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-4\rvert \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2, 6]$
$\lvert x+3\rvert < 4$	$d(x,-3) < 4$	$(-7, 1)$
$\lvert x-4\rvert > 2$	$d(x,4) > 2$	$(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
$\lvert x+3\rvert \geq 4$	$d(x,-3) \geq 4$	$(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-5\rvert < 1$	$d(x,5) < 1$	$(4, 6)$
$\lvert x+1\rvert > 2$	$d(x,-1) > 2$	$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
$\lvert x-5\rvert \geq 1$	$d(x,5) \geq 1$	$(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$
$\lvert x+1\rvert \leq 2$	$d(x,-1) \leq 2$	$[-3, 1]$

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x\rvert < 2$	$d(x,0) < 2$	$(-2, 2)$
$\lvert x+2\rvert \leq 3$	$d(x,-2) \leq 3$	$[-5, 1]$
$\lvert x\rvert \geq 2$	$d(x,0) \geq 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
$\lvert x+2\rvert > 3$	$d(x,-2) > 3$	$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε
$|\alpha - \beta| = |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και άρα $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ οπότε έχουμε:

i) $\dfrac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ και

ii) $\dfrac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \dfrac{2\beta}{2} = \beta$.

3. Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$, έχουμε:

$$|x| + |y| \geq 0$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $|x| = 0$ και $|y| = 0$, δηλαδή $x = 0$ και $y = 0$.
Διαφορετικά ισχύει η ανισότητα. Επομένως:
i) $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$.
ii) $|x| + |y| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ή $y \neq 0$.

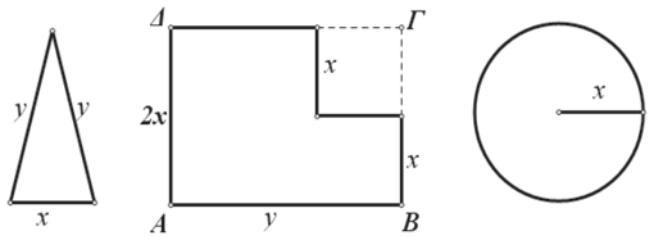
4. i) Από $0 < \alpha < \beta$ προκύπτει ότι $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$ και $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$. Είναι δηλαδή $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1 < \dfrac{\beta}{\alpha}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right| < \left|1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ ή, ισοδύναμα, ότι $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$.

Επειδή $\alpha\beta > 0$ η ανισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha\beta - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha\beta < \frac{\beta}{\alpha}\alpha\beta - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha^2 < \beta^2 - \alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow 0 < \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 > 0, \text{ που ισχύει αφού } \alpha \neq \beta.$$

5. Είναι $|x - 2| < 0{,}1 \Leftrightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$ (1) και
$|y - 4| < 0{,}2 \Leftrightarrow 3{,}8 < y < 4{,}2$ (2)



i) Η περίμετρος P_1 του τριγώνου είναι $P_1 = x + 2y$. Από την ανισότητα (2) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 2y < 8{,}4 \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3), έχουμε:

$1{,}9 + 7{,}6 < x + 2y < 2{,}1 + 8{,}4 \Leftrightarrow 9{,}5 < P_1 < 10{,}5.$

ii) Η περίμετρος P_2 του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, οπότε είναι $P_2 = 4x + 2y$. Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 4x < 8{,}4 \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (3), έχουμε:

$$7{,}6 + 7{,}6 < 4x + 2y < 8{,}4 + 8{,}4 \Leftrightarrow 15{,}2 < P_2 < 16{,}8.$$

iii) Η περίμετρος L του κύκλου είναι $L = 2\pi x$. Από την (1) προκύπτει

$$2\pi \cdot 1{,}9 < 2\pi x < 2\pi \cdot 2{,}1 \Leftrightarrow 3{,}8\pi < L < 4{,}2\pi.$$

§ 2.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$,

$\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$, $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$.

ii) $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$, $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

iii) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$, $\sqrt[3]{0{,}001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$,

$\sqrt[4]{0{,}0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10}$, $\sqrt[5]{0{,}00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$.

2. i) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi$.

ii) $\sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20$.

iii) $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$.

iv) $\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{|x|}{2}$.

3. Έχουμε

$$\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

4. $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=\left(\sqrt{x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2$

$$= (x-5)-(x+3)$$
$$= x-5-x-3=-8,$$

με την προϋπόθεση ότι $x-5\geq 0$ και $x+3\geq 0$, δηλαδή για $x\geq 5$.

5. i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)$

$$=\left(\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{2\cdot 9}\right)\left(\sqrt{2\cdot 25}+\sqrt{2\cdot 36}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(-\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}\right)=-7\left(\sqrt{2}\right)^2=-14.$$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right)$

$$=\left(\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{7}+\sqrt{2\cdot 16}\right)\left(\sqrt{7\cdot 9}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(3\sqrt{7}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2=9\cdot 7-16\cdot 2=63-32=31.$$

6. i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9-5}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2.$$

7. i) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}\,.$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt{\sqrt{2^{4/3}}}$$
$$=\sqrt{\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}=\sqrt{2^{2/3}}=\left(2^{2/3}\right)^{1/2}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}\,.$$

ii) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}$$
$$=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^{10}}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}.$$

ii) <u>2ος τρόπος:</u>

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2^{4/3}}}=\sqrt[5]{2\cdot\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}$$

$$=\sqrt[5]{2\cdot 2^{2/3}}=\sqrt[5]{2^{5/3}}=\left(2^{5/3}\right)^{1/5}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}.$$

8. i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=3^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}}=3^{\frac{13}{12}}=3\cdot 3^{\frac{1}{12}}=3\sqrt[12]{3}.$

ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}}=2^{\frac{16}{18}+\frac{15}{18}}=2^{\frac{31}{18}}=2\cdot 2^{\frac{13}{18}}=2\sqrt[18]{2^{13}}.$

iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{6}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{15}{6}}=5^{\frac{5}{2}}$

$$=\sqrt{5^5}=5^2\cdot\sqrt{5}=25\sqrt{5}.$$

9. i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=\dfrac{25\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{25\cdot 3}}=\dfrac{25\cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=10.$

ii) Με ανάλυση του 216 σε πρώτους παράγοντς βρίσκουμε $216=2^3\cdot 3^3$ οπότε έχουμε

$$\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2^3\cdot 3^3}\cdot\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{2\cdot 25}}=\frac{5\sqrt{2^3\cdot 3^4}}{5\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^3\cdot 3^4}{2}}=\sqrt{2^2\cdot 3^4}=2\cdot 3^2=18.$$

10. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα με τη συζηγή παράσταση του παρονομαστή του έχουμε:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{22}=\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}.$

ii) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$

iii) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{7-6}=\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2$

$$=7+6+2\sqrt{42}=13+2\sqrt{42}.$$

11. i) Αν αναλύσουμε τους 162 και 98 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε $162 = 2 \cdot 3^4$ και $98 = 2 \cdot 7^2$ οπότε είναι

$$\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 7^2}}{\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 16}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16.$$

ii) Είναι $9^{12} + 3^{20} = 9^{12} + (3^2)^{10} = 9^{12} + 9^{10} = 9^{10} \cdot (9^2 + 1) = 82 \cdot 9^{10}$.

και $9^{11} + 27^6 = 9^{11} + (3 \cdot 9)^6 = 9^{11} + 3^6 \cdot 9^6 = 9^{11} + (3^2)^3 \cdot 9^6$

$= 9^{11} + 9^9 = 9^9(9^2 + 1) = 82 \cdot 9^9$

οπότε έχουμε

$$\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}} = \sqrt{\frac{82\cdot 9^{10}}{82\cdot 9^9}} = \sqrt{9} = 3.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{9+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4}{3-2} = 5+\sqrt{6}.$$

ii) $$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{\left(\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)} = \frac{\alpha^2+\alpha\sqrt{\alpha\beta}-\beta\sqrt{\alpha\beta}-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}\,(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = \alpha+\beta+\sqrt{\alpha\beta}.$$

2. i) Αξιοποιώντας γνωστές ταυτότητες έχουμε:

$\left(3+2\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 4 \cdot 7 + 12\sqrt{7} = 37 + 12\sqrt{7}$ και

$\left(3-2\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 4 \cdot 7 - 12\sqrt{7} = 37 - 12\sqrt{7}$.

ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) παίρνουμε

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}} - \sqrt{37-12\sqrt{7}}$$
$$= \sqrt{\left(3+2\sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2}$$
$$= \left|3+2\sqrt{7}\right| - \left|3-2\sqrt{7}\right| = 3+2\sqrt{7} - \left(2\sqrt{7}-3\right) = 6.$$

3. i) Είναι

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2 = \frac{4}{6}+\frac{9}{6}+\frac{12}{6} = \frac{25}{6}$$

που είναι ρητός αριθμός.

ii) Είναι

$$\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$=\alpha+\frac{1}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+1+2\alpha}{\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

που είναι ρητός αριθμός.

4. i) Μετατρέποντας τους παρονομαστές σε ρητούς έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}+3+5-\sqrt{5}\,\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

ii) Είναι

- $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$ και
- $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ οπότε

Έχουμε

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}-\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}-\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

5. i) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=\alpha+\beta$, οπότε $B\Gamma=\sqrt{\alpha+\beta}$.

ii) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει $B\Gamma<AB+A\Gamma$ που σημαίνει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\le\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta\le\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\Leftrightarrow 0\le 2\sqrt{\alpha\beta}$, που ισχύει.

Το "=" ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$.

3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με $\alpha \neq 0$

Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι αριθμοί α, β.

Έχουμε λοιπόν

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x = -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε:

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

  Επομένως, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x = -\frac{\beta}{a}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:
  - **i)** αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
  - **ii)** αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Για παράδειγμα

✓ Για την εξίσωση $4(x-5) = x-5$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 4(x-5)=x-5 &\Leftrightarrow 4x-20=x-5 \\ &\Leftrightarrow 4x-x=20-5 \\ &\Leftrightarrow 3x=15 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{15}{3}=5. \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=5$.

✓ Για την εξίσωση $3x-x-3=2x$ Έχουμε

$$3x-x-3=2x \Leftrightarrow 3x-x-2x=3 \Leftrightarrow 0x=3$$

που είναι αδύνατη.

✓ Για τη εξίσωση $4(x-5)-x=3x-20$ έχουμε

$$4x-20-x=3x-20 \Leftrightarrow 4x-x-3x=20-20 \Leftrightarrow 0x=0$$

που είναι ταυτότητα.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta=0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$\left(\lambda^2-1\right)x-\lambda+1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \left(\lambda^2-1\right)x-\lambda+1=0 &\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)x=\lambda-1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)x=\lambda-1 \end{aligned}$$

Επομένως

✓ Αν $\lambda\neq-1$ *και* $\lambda\neq1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x=\frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-1)}=\frac{1}{\lambda+1}$$

✓ Αν $\lambda=-1$, η εξίσωση γίνεται $0x=-2$ και είναι αδύνατη.

✓ Αν $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στην μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 *km/h* και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

ΛΥΣΗ

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα , ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1$

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10 &\Leftrightarrow 4x+5x+100=1000\\ &\Leftrightarrow 9x=900\\ &\Leftrightarrow x=100\end{aligned}$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x\neq 1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1}-(x-1)=(x-1)\frac{1}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x+1=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0, \qquad \text{αφού } x\neq 1.$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-1|=|x+3|$$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x-1|=|x+3|\Leftrightarrow 2x-1=x+3 \quad \text{ή} \quad 2x-1=-(x+3)$$

Όμως:

✓ $2x-1=x+3\Leftrightarrow 2x-x=4\Leftrightarrow x=4$

✓ $2x-1=-(x+3)\Leftrightarrow 2x+x=-3+1\Leftrightarrow 3x=-2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής $|f(x)|=|g(x)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-3|=3x-2$$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x-2\geq 0 \qquad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$|2x-3| = 3x-2 \Leftrightarrow 2x-3 = 3x-2 \quad \text{ή} \quad 2x-3 = 2-3x$$
$$\Leftrightarrow 2x-3x = -2+3 \quad \text{ή} \quad 2x+3x = 2+3$$
$$\Leftrightarrow -x = 1 \quad \text{ή} \quad 5x = 5$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4x-3(2x-1) = 7x-42$ **ii)** $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60}$ **iv)** $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2(3x-1) - 3(2x-1) = 4$ **ii)** $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$.

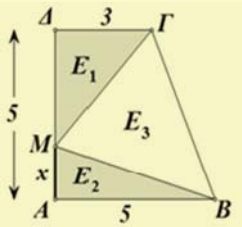
3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $(\lambda-1)x = \lambda-1$ **ii)** $(\lambda-2)x = \lambda$

iii) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda-1$ **iv)** $\lambda(\lambda-1)x = \lambda^2+\lambda$

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην $AΔ$ ώστε για τα εμβαδά $E_1 = (M\overset{\triangle}{Δ}Γ)$, $E_2 = (M\overset{\triangle}{A}B)$ και $E_3 = (M\overset{\triangle}{B}Γ)$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ **ii)** $E_1 = E_2$



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175€ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

i) $v = v_0 + \alpha t,\ \alpha \neq 0$ (ως προς το t) **ii)** $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (ως προς το R_1).

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$.

ii) $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$ **ii)** $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **ii)** $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **ii)** $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$ **ii)** $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ **ii)** $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

iii) $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$ **iv)** $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$.

13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμα τους να ισούται με το γινόμενο τους.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $|2x-3| = 5$ **ii)** $|2x-4| = |x-1|$

iii) $|x-2| = 2x-1$ **iv)** $|2x-1| = x-2$.

15. .Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$, **ii)** $\frac{2|x|+1}{3}-\frac{|x|-1}{2}=\frac{1}{2}$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$ **ii)** $|x-1||x-2|=|x-1|$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

i) $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=2\alpha(\alpha+\beta)$ **ii)** $\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{x-\beta}{\alpha}$

έχουν πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α,β.

2. Ποιοί περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}=1$;

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100*km/h*. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120*km/h* προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1*km*;

5. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$ για όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+4$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-1|=3$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$.

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

- Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε $x \le 0$ ισχύει $x^3 \le 0$.
  Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.

  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ***ν* περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $\left(-\sqrt[4]{16}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$.

  Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$.

  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ***ν* άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.

- Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$ Έχουμε διαδοχικά:

  $$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

  Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$

  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και ***ν* περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|a|}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \ge 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και ***ν* άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει προφανή λύση την $x = \alpha$, προκύπτει ότι:

- **Αν ο ν <u>περιττός</u>, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση, την $x = \alpha$**
- **Αν ο ν <u>άρτιος</u>, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$

ΛΥΣΗ

$$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 + 8\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -8$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$ **ii)** $x^5 - 243 = 0$ **iii)** $x^7 - 1 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 125 = 0$ **ii)** $x^5 + 243 = 0$ **iii)** $x^7 + 1 = 0$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 64 = 0$ **ii)** $x^4 - 81 = 0$ **iii)** $x^6 - 64 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^5 - 8x^2 = 0$ **ii)** $x^4 + x = 0$ **iii)** $x^5 + 16x = 0$.

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $81m^3$ και διαστάσεις x, x και $3x$. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x+1)^3 = 64$ **ii)** $1 + 125x^3 = 0$ **iii)** $(x-1)^4 - 27(x-1) = 0$.

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \text{με } \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t - S = 0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου»**.

Έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad [\text{αφού } \alpha \neq 0\ ]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad .$$

- Αν $\boldsymbol{\Delta=0}$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \quad \text{ή} \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\boldsymbol{\Delta<0}$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση $\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Για παράδειγμα

- ✓ Η εξίσωση $2x^2-3x+1=0$ έχει $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1>0$, οπότε έχει δυο ρίζες τις $x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\cdot 2}=1$ και $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$.
- ✓ Η εξίσωση $x^2-4x+4=0$ έχει $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$.

  Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής:

  $$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (διπλή ρίζα).}$$
- ✓ Η εξίσωση $2x^2-3x+4=0$ έχει $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=-23<0$, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο $x_1\cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow x^2-\left(x_1+x_2\right)\cdot x+x_1\cdot x_2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0\end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2-3x+\sqrt{2}=0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να λυθεί η εξίσωση $x^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)x+4\sqrt{3}=0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=4\left(\sqrt{3}+1\right)^2-4\cdot 4\sqrt{3}=4\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1\right]=4\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_{1,2}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)\pm\sqrt{4\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2\pm 2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\begin{cases}2\sqrt{3}\\ 2\end{cases}$$

2η Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300*m*. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή, που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i) πέσει από την κορυφή;

ii) εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec;

Δίδεται ότι $g\simeq 10$ *m/sec*^{2}.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από την Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S=\frac{1}{2}gt^2$

Επειδή $S=300m$ και $g\simeq 10\frac{m}{\sec^2}$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2=300\Leftrightarrow 5t^2=300\Leftrightarrow t^2=60\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{60}\Leftrightarrow t\simeq\pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t\simeq 7,75\sec$.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι $S=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2$.

Επειδή $v_0=50\frac{m}{\sec}$ και $t>0$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2+50t=300\Leftrightarrow 5t^2+50t-300=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+10t-60=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-10+\sqrt{100+4\cdot 60}}{2}\simeq\frac{-10+18,43}{2}=4,22\sec.$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου $4,22\sec$.

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε, αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

***ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο*:**

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

***ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο*:**

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}.$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x-1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} = x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

***ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο*:**
Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

ΛΥΣΗ
Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$ Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$.

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

ΣΧΟΛΙΟ
Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται **διτετράγωνες** εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **ii)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **iii)** $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^2 - 1,69 = 0$ **ii)** $0,5x^2 - x = 0$ **iii)** $3x^2 + 27 = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:
i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \quad \lambda \neq 0$ **ii)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \quad \alpha \neq 0$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \ \mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+2\left(\alpha+\beta\right)x+2=0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha=\beta$.

6. Να βρείτε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

i) 2 και. 3 **ii)** 1 και $\frac{1}{2}$ **iii)** $5-2\sqrt{6}$ και $5+2\sqrt{6}$.

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15.

ii) άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}=0$ **ii)** $x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2+\alpha^2=\beta^2-2ax$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο $26cm$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2-7|x|+12=0$ **ii)** $x^2+2|x|-35=0$ **iii)** $x^2-8|x|+12=0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2+4|x-1|-5=0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ **ii)** $\frac{2}{x}+\frac{2x-3}{x-2}+\frac{2-x^2}{x^2-2x}=0$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4+6x^2-40=0$ **ii)** $4x^4+11x^2-3=0$ **iii)** $2x^4+7x^2+3=0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2-2\alpha^3x+\alpha^4-1=0$, με $\alpha\neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ και $\dfrac{\alpha^2-1}{a}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\left(5-\sqrt{2}\right)x+6-3\sqrt{2}=0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2-\sqrt{2}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2+\left(\alpha-9\right)x+\alpha^2+3\alpha+4=0$ έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\dfrac{1}{x},\quad \alpha\neq 0$ **ii)** $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha},\quad \alpha,\beta\neq 0$.

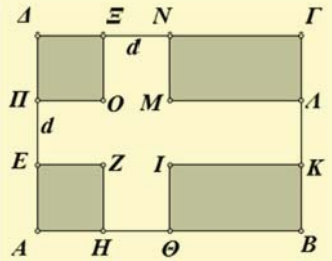
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x-8=0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

8. Η σημαία. του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις $4m$ και $3m$ αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + \alpha = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς *α*, *β* και *γ*. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα *Ψ*.

1. Η εξίσωση $(\alpha-1)x = \alpha(\alpha-1)$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$. Α Ψ

2. Η εξίσωση $(|x|+1)(|x|+2) = 0$ είναι αδύνατη. Α Ψ

3. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|-2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Α Ψ

4. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|+2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Α Ψ

5. Η εξίσωση $|x| = x - 2$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

6. Η εξίσωση $|x| = 2 - x$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

7. Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Α Ψ

8. Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι. Α Ψ

9. Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Α Ψ

10. Η εξίσωση $x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Α Ψ

11. Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες. Α Ψ

12. Η εξίσωση $2x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Α Ψ

13. Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$, με $\alpha \neq 0, 1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες. Α Ψ

14. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

15. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

16. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = -10$ και γινόμενο $P = 16$. Α Ψ

17. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 10$ και γινόμενο $P = 25$. Α Ψ

18. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = 2$. Α Ψ

ΙΙ. Να εντοπίσετε το <u>λάθος</u> στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2)$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2) \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

Όμως και ο αριθμός $x = -2$ <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.

2. Η εξίσωση $|2x-1| = x - 2$ γράφεται ισοδύναμα:

$$|2x-1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2 \text{ ή } 2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.

Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις

$$x^2 + px = q, \quad x^2 - px = q, \quad x^2 - px = -q\ .$$

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τούς Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \ \ \alpha \neq 0\ .$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

<u>Μέθοδος των Ινδών</u>

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου).
Έχουμε διαδοχικά:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma$$
$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$
$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma},\quad \text{εφόσον}\quad \beta^2-4\alpha\gamma\geq 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι: $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Σχόλιο: Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται. παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

<u>Μέθοδος του Vieta</u>

Η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x=y-\frac{\beta}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\left(y-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\beta\left(y-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)+\gamma=0$ η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2+\frac{-\beta+4\alpha\gamma}{4\alpha}=0\,.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $y=\dfrac{\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εφόσον $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x=y-\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Οπότε

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\,.$$

Σχόλιο: Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, είναι η αντικατάσταση $x=y-\dfrac{\beta}{3\alpha}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.

Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas **Harriot** (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0 \qquad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2. Αυτή είναι η $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή ,ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \qquad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{και} \qquad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}, \qquad [\text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0] \quad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad \text{και} \qquad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

***Σχόλιο*:** Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5). Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 και x_2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 3.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42$

$\Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow x = 5.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

ii) $\dfrac{1-4x}{5} - \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{x-4}{20} + \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 20\,\dfrac{1-4x}{5} - 20\,\dfrac{x+1}{4} = 20\,\dfrac{x-4}{20} + 20\,\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 4(1 - 4x) - 5(x + 1) = x - 4 + 25 \Leftrightarrow 4 - 16x - 5x - 5 = x + 21$

$\Leftrightarrow -21x - x = 21 + 1 \Leftrightarrow -22x = 22 \Leftrightarrow x = -1.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -1$.

iii) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{49}{60} \Leftrightarrow 60 \cdot \dfrac{x}{2} - 60 \cdot \dfrac{x}{3} = 60 \cdot \dfrac{x}{4} - 60 \cdot \dfrac{x}{5} - 60 \cdot \dfrac{49}{60}$

$\Leftrightarrow 30x - 20x = 15x - 12x - 49 \Leftrightarrow 30x - 20x - 15x + 12x = -49$

$\Leftrightarrow 7x = -49 \Leftrightarrow x = -7.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -7$.

iv) $1{,}2(x + 1) - 2{,}5 + 1{,}5x = 8{,}6 \Leftrightarrow 12(x + 1) - 25 + 15x = 86$

$\Leftrightarrow 12x + 12 - 25 + 15x = 86 \Leftrightarrow 27x = 99 \Leftrightarrow x = \dfrac{99}{27} = \dfrac{11}{3}.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \dfrac{11}{3}$.

2. i) $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 3.$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $2x - \dfrac{5-x}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{7x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 2x - 3 \cdot \dfrac{5-x}{3} = 3 \cdot \left(\dfrac{-5}{3}\right) + 3 \cdot \dfrac{7x}{3}$

$\Leftrightarrow 6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 0x = 0.$

Άρα, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3. i) • Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1.$$

• Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ii) • Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}.$$

• Αν $\lambda = 2$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

• Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

• Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $0x = -1$ και είναι αδύνατη.
• Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda + 1)$.

• Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

• Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
• Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

4. Έστω $AM = x$, τότε $\Delta M = 5 - x$, οπότε

$$E_1 = \frac{3(5 - x)}{2} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{x \cdot 5}{2}.$$

i) Η ισότητα $E_1 + E_2 = E_3$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$E_1 + E_2 = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{3(5 - x)}{2} + \frac{5x}{2} = \frac{(5 + 3)5}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{15 - 3x}{2} + 4 \cdot \frac{5x}{2} = 4 \cdot \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6x + 10x = 40 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = 2{,}5$, είναι δηλαδή το μέσο του ΑΔ.

ii) Η ισότητα $E_1 = E_2$ είναι ισοδύμαμη με την εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2} = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 15 - 3x = 5x \Leftrightarrow 15 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = \frac{15}{8}$.

5. Αν το ποσό των x ευρώ κατατέθηκε προς 5%, τότε το υπόλοιπο ποσό των (4000 – x) ευρώ κατατέθηκε προς 3%.

– Το ποσό των x ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{5}{100}x$ ευρώ

– Το ποσό των (4000 – x) ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{3}{100}(4000 - x)$ ευρώ.

Η εξίσωση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα είναι

$$\frac{5}{100}x + \frac{3}{100}(4000 - x) = 175 \Leftrightarrow 5x + 3(4000 - x) = 100 \cdot 175$$

$\Leftrightarrow 5x + 12.000 - 3x = 17.500 \Leftrightarrow 2x = 17.500 - 12.000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 5.500 \Leftrightarrow x = 2.750$ ευρώ.

Επομένως τα 2.750 ευρώ τοκίστηκαν προς 5% και τα υπόλοιπα 1.250 ευρώ τοκίστηκαν προς 3%.

6. i) $v = v_0 + \alpha t \Leftrightarrow \alpha t = v - v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{\alpha}$, αφού $\alpha \neq 0$.

ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R_2 R}$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $R_2 - R \neq 0$, αφού το $\frac{1}{R_1} \neq 0$.

Επομένως έχουμε $R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$.

7. i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ή $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και –1.

ii) $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (x - 2)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2) + (x + 4)] = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και –1.

8. i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3} - x - \cancel{x^3} + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 1.

ii) $(x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \cancel{1} + x^2 - \cancel{1} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –1 και 0.

9. i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x(x - 2)^2 (x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 1.

ii) $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)[(x + 2) - (x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

10. i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2, 1 και –1.

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (2x - 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

11. i) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2(x-1) = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (αφού } x \neq 1).$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -1$.

ii) $\dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0.$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1,$$

που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

Επομένως και η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς του περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1)\frac{1}{x+1} = (x-1)(x+1)\frac{2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + x - 1 = 2$$

$\Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται, αφού $x \neq 1$.

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)\frac{3}{x+2} - x(x+2)\frac{2}{x} = x(x+2)\frac{x-4}{x(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό εκτός από τους αριθμούς 0 και –2.

iii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x \Leftrightarrow 0x = 2, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

iv) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1},$$

που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, με $x \neq \pm 1$.

13. Έστω $x - 1$, x, $x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Ζητούμε ακέραιο x τέτοιον ώστε να ισχύει

$(x - 1) + x + (x + 1) = (x - 1)\, x(x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x = x(x^2 - 1)$

$\Leftrightarrow x(3 - x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x(4 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

Επομένως υπάρχουν τρεις τριάδες τέτοιων διαδοχικών αριθμών, οι εξής:

$$(-1, 0, 1), \quad (1, 2, 3) \quad \text{και} \quad (-3, -2, -1).$$

14. i) $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5$ ή $2x - 3 = -5$

$\Leftrightarrow 2x = 8$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και –1.

ii) $|2x - 4| = |x - 1| \Leftrightarrow 2x - 4 = x - 1$ ή $2x - 4 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x = 3$ ή $3x = 5 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = \frac{5}{3}$.

iii) Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης $|x - 2| = 2x - 1$ είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει

$$2x - 1 \geq 0 \qquad (1)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$|x - 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 1$ ή $x - 2 = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

iv) Ομοίως, για την εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$, πρέπει

$$x - 2 \geq 0 \qquad (2)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή $2x - 1 = 2 - x$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή, αφού καμία δεν επαληθεύει τον περιορισμό (2). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

15. i) Έχουμε:

$$\frac{|x| + 4}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 15 \cdot \frac{|x| + 4}{3} - 15 \cdot \frac{|x| + 4}{5} = 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5|x| + 20 - 3|x| - 12 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –1 και 1.

ii) $$\frac{2|x| + 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2|x| + 1}{3} - 6 \cdot \frac{|x| - 1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 4|x| + 2 - 3|x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = -2$, που είναι αδύνατη.

16. i) Η εξίσωση $\left|\frac{3 - x}{3 + x}\right| = 4$ ορίζεται για $x \neq -3$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\left|\frac{3 - x}{3 + x}\right| = 4 \Leftrightarrow |3 - x| = 4 \cdot |3 + x|$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = 4(x + 3) \text{ ή } 3 - x = -4(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = 4x + 12 \text{ ή } 3 - x = -4x - 12$$

$$\Leftrightarrow 5x = -9 \text{ ή } 3x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5} \text{ ή } x = -5.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –5 και $-\frac{9}{5}$.

ii) $|x-1|\,|x-2| = |x-1| \Leftrightarrow |x-1|\,(|x-2|-1) = 0$

$\Leftrightarrow |x-1| = 0$ ή $|x-2| = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x-2 = 1$ ή $x-2 = -1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 3.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 - 2\beta x + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 + 2\beta x - \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)^2$.

- Αν $\alpha+\beta \neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
- Αν $\alpha+\beta = 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ii) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(x-\alpha) = \beta(x-\beta) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha^2 = \beta x - \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x - \beta x = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)x = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta).$$

- Αν $\alpha-\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} = \alpha+\beta$.
- Αν $\alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, οπότε είναι ταυτότητα.

2. i) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta x - \alpha x}{\alpha\beta} = 1 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)x = \alpha\beta.$$

- Αν $\beta-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}$.
- Αν $\beta-\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \alpha^2$ και είναι αδύνατη γιατί $\alpha \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$.

3. i) Στα 200 ml διάλυμα περιέχονται 30 ml καθαρό οινόπνευμα. Αν προσθέσουμε x ml καθαρό οινόπνευμα τότε το διάλυμα που θα προκύψει θα είναι (200 + x) ml και θα περιέχει (30 + x) ml καθαρό οινόπνευμα οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{30+x}{200+x} = \frac{32}{100} \Leftrightarrow 100(30+x) = 32(200+x) \cdot$$

$$\Leftrightarrow 3000 + 100x = 6400 + 32x \Leftrightarrow 68x = 3400$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3400}{68} \Leftrightarrow x = 50.$$

Επομένως ο φαρμακοποιός πρέπει να προσθέσει 50 ml καθαρό οινόπνευμα.

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι 100x ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι 120x. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$120x - 100x = 1 \Leftrightarrow 20x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20}$ ώρες, οπότε $x = \frac{1}{20} \cdot 60 = 3$ λεπτά.

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

5. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq \alpha$ και $x \neq -\alpha$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{(x+\alpha)(x-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow (x+\alpha)^2 = x^2 \Leftrightarrow x+\alpha = x \quad \text{ή} \quad x+\alpha = -x$$

$$\Leftrightarrow 0x = \alpha \quad \text{ή} \quad 2x = -\alpha.$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει ως λύση κάθε αριθμό $x \neq 0$.
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = \frac{-\alpha}{2}$.

6. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq 2$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - \cancel{8} = \cancel{x^3} - 2x^2 + 4x - \cancel{8}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 0$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $x = 0$.

7. $|2|x| - 1| = 3 \Leftrightarrow 2|x| - 1 = 3$ ή $2|x| - 1 = -3$

$\Leftrightarrow 2|x| = 4$ ή $2|x| = -2$.

Η δεύτερη είναι αδύνατη οπότε έχουμε

$$2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –2 και 2.

8. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |3x - 5|$

$\Leftrightarrow |x - 1| = |3x - 5|$

$\Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5$ ή $x - 1 = -3x + 5$

$\Leftrightarrow 2x = 4$ ή $4x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \dfrac{3}{2}$.

§ 3.2. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$.

ii) $x^5 - 243 = \Leftrightarrow x^5 = 3^5 \Leftrightarrow x = 3$.

iii) $x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

2. i) $x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = (-5)^3 \Leftrightarrow x = -5$.

ii) $x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = (-3)^5 \Leftrightarrow x = -3$.

iii) $x^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = (-1)^7 \Leftrightarrow x = -1$.

3. i) $x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = -8$ ή $x = 8$.

ii) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{81}$ ή $x = -\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

iii) $x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{64}$ ή $x = -\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.

4. i) $x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ή $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και 2.

ii) $x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και –1.

iii) $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 = -16 \Leftrightarrow x = 0$
αφού η $x^4 = -16$ είναι αδύνατη.
Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

5. Για το x έχουμε την εξίσωση
$x \cdot x \cdot 3x = 81$, με $x > 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 81 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$.
Άρα, οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι 3m, 3m και 9m.

6. i) $(x + 1)^3 = 64 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

ii) $1 + 125x^3 = 0 \Leftrightarrow (5x)^3 = -1 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

iii) $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^3 - 27] = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $(x - 1)^3 = 27$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x - 1 = 3$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$.

§ 3.3. Εξισώσεις 2ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες
$x_1 = \frac{5 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ και $x_2 = \frac{5 - 1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

ii) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την
$x = \frac{6}{2} = 3$.

iii) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. i) $x^2 - 1{,}69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}69 \Leftrightarrow x = 1{,}3$ ή $x = -1{,}3$

ii) $0{,}5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0{,}5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $0{,}5x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

iii) $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$, που είναι αδύνατη.

3. i) Έχουμε $\Delta = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Έχουμε $\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Επειδή

$$\Delta = 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1,$$

οι τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει διπλή ρίζα είναι οι αριθμοί 1 και –1.

5. Έχουμε $\Delta = 4(\alpha+\beta)^2 - 4\cdot 2(\alpha^2+\beta^2) = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 8\alpha\beta - 8\alpha^2 - 8\beta^2$

$= -4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8\alpha\beta = -4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$

$= -4(\alpha-\beta)^2 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = \beta \neq 0$, ισχύει $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

Αν είναι $\alpha = \beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2 = 0$ και είναι αδύνατη.

6. i) $S = 2 + 3 = 5$ και $P = 2\cdot 3 = 6$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ii) $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $P = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

iii) $S = \left(5 - 2\sqrt{6}\right) + \left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 10$ και

$P = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 25 - 4\cdot 6 = 1$ οπότε η εξίσωση είναι η:

$x^2 - 10x + 1 = 0.$

7. i) Είναι $S = 2$ και $P = -15$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 15 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 4 - 4(-15) = 64$. Επομένως οι ζητουμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

ii) Είναι $S = 9$ και $P = 10$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 9x + 10 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 81 - 4\cdot 10 = 41$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{41}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{9-\sqrt{41}}{2}.$$

8. 1ος τρόπος:

i) Για να λύσουμε την εξίσωση αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ και γινόμενο $\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι προφανώς οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ που είναι και οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

2ος τρόπος:

Είναι $\Delta=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{15}=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$

$$=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2>0.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{5} \quad \text{και}$$

$$x_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

ii) Είναι $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2>0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2}=1 \quad \text{και} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2}=-\sqrt{2}.$$

9. 1ος τρόπος:

$x^2+\alpha^2=\beta^2-2\alpha x \Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow (x+\alpha)^2-\beta^2=0$

$\Leftrightarrow (x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow x=-\alpha-\beta$ ή $x=\beta-\alpha$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$.

Είναι $\Delta=4\alpha^2-4(\alpha^2-\beta^2)=4\beta^2$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1=\frac{-2\alpha-2\beta}{2}=-(\alpha+\beta) \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-2\alpha+2\beta}{2}=\beta-\alpha.$$

10. Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου. Τότε έχουμε

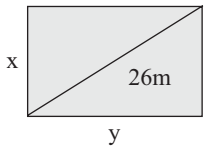
$2x+2y=68 \Leftrightarrow x+y=34 \Leftrightarrow y=34-x \quad (1)$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$x^2+y^2=26^2$, οπότε λόγω της (1) έχουμε

$x^2+(34-x)^2=26^2 \Leftrightarrow x^2+34^2-68x+x^2=26^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-68x+34^2-26^2=0$



$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + (34 - 26)(34 + 26) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 8 \cdot 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 4 \cdot 60 = 0.$$

Είναι $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 60 = 196$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{34 + 14}{2} = 24 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{34 - 14}{2} = 10.$$

Οι ρίζες αυτές λόγω και της (1) είναι οι ζητούμενες πλευρές του ορθογωνίου.

11. i) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$ και έχει ρίζες $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 4$ που είναι δεκτές και οι δύο, οπότε έχουμε $|x| = 3$ ή $|x| = 4$, που σημαίνει ότι $x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 4$ ή $x = -4$. Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3, –3, 4 και –4.

ii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 35 = 0.$$

Είναι $\Delta = 144$.
Η εξίσωση έχει ρίζες 5 και –7. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 5$, που σημαίνει $x = 5$ ή $x = -5$.

iii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε $x^2 - 8|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 12 = 0$, αφού $x^2 = |x|^2$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 6 και 2, που είναι δεκτές και οι δύο. Επομένως $|x| = 6$ ή $|x| = 2$ που σημαίνει ότι $x = 6$ ή $x = -6$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

12. Θέτουμε $|x - 1| = \omega$, οπότε έχουμε
$(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 4\omega - 5 = 0$, αφού $(x - 1)^2 = |x - 1|^2$.
Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς –5 και 1. Δεκτή είναι μόνο η θετική $\omega = 1$ αφού $\omega = |x - 1| \geq 0$. Επομένως,

$$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \text{ ή } x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 0.$$

Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 2.

13. Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = \omega$ οπότε η εξίσωση γράφεται $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες του αριθμούς 2 και 3, οπότε έχουμε

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

και έχει το 1 διπλή ρίζα.

Η δεύτερη γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

και έχει ως ρίζες του αριθμούς

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

14. i) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1)\frac{x}{x+1} + 6x(x+1)\frac{x+1}{x} = 6x(x+1)\frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6(x+1)^2 = 13x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –3.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\frac{2}{x} + x(x-2)\frac{2x-3}{x-2} + x(x-2)\frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –1, οπότε λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x = -1$.

15. i) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $y^2 + 6y - 40 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -10$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$, οπότε έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί –2 και 2.

ii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $4y^2 + 11y - 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = \frac{1}{4}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ δεκτή είναι μόνο η $y_2 = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

iii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $2y^2 + 7y + 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ καμία από αυτές δεν είναι δεκτή. Επομένως η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $2x^4 + 7x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\alpha^2(\alpha^4 - 1) = 4\alpha^6 - 4\alpha^6 + 4\alpha^2 = 4\alpha^2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. i) Είναι

$$\Delta = \left(5 - \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6 - 3\sqrt{2}\right) = 25 - 10\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 24 + 12\sqrt{2} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}}{2} = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

3. i) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = (\alpha - 9)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4) = \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32$
$= -7\alpha^2 - 42\alpha + 49$, οπότε

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 42\alpha - 49 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7$ ή $\alpha = 1$.
Επομένως για $\alpha = -7$ ή $\alpha = 1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

4. Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.
Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta\frac{1}{\rho} + \gamma\frac{1}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0.$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. i) <u>1ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha + \frac{x-\alpha}{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)\left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \text{ ή } \alpha x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\frac{1}{\alpha}.$$

<u>2ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^2 - \alpha + (1-\alpha^2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0.$$

Είναι $\Delta = (\alpha^2 - 1)^2 - 4\alpha(-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

ii) <u>1ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$ Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta) = \alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta) = \alpha\left(\frac{x-\beta}{\beta x}\right) \Leftrightarrow (x-\beta)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

<u>2ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha\beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha\beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2\beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - \beta^2 x + \alpha^2\beta - \alpha^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x(x - \beta) + \alpha^2(\beta - x) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)(\beta x - \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

<u>3ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha\beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha\beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2\beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta = 0.$$

Είναι

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

• Αν $\alpha \neq \pm\beta$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\beta^2}{2\beta} = \beta.$$

• Αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{(\pm\beta)^2}{\beta} = \beta.$$

6. i) Έχουμε
$\Delta = 4\lambda^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2 = x_1^2$. Από τους τύπους Vieta έχουμε

• $x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = -2\lambda$ και

• $x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -2$, οπότε $x_2 = (-2)^2 = 4$.

Τότε έχουμε

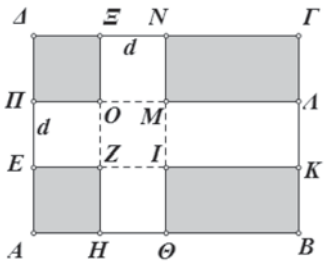
$-2 + 4 = -2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

7. Έστω $x - 1$, x, $x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ αφού } x \neq 0 \text{ ως πλευρά τριγώνου.}$$

Η λύση $x = 4$ της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μία μόνο τριάδα διαδοχικών ακεραίων που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Οι ακέραιοι αυτοί είναι οι 3, 4 και 5.

8. Το εμβαδόν E_1 του σταυρού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των δύο λευκών λωρίδων της σημαίας από το οποίο όμως πρέπει να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού τετραγώνου (ΟΜΙΖ) πλευράς d. Είναι δηλαδή



$E_1 = 3 \cdot d + 4 \cdot d - d^2 = 7d - d^2$

Έστω E_2 το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας. Θα ισχύει $E_1 = E_2$ αν και μόνο αν το E_1 είναι ίσο με το μισό του εμβαδού ολόκληρης της σημαίας. Επομένως έχουμε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 7d - d^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 1 \quad \text{ή} \quad d = 6.$$

Όμως για το d έχουμε τον περιορισμό $0 < d < 3$, οπότε $d = 1$.

9. Αν το μηχάνημα Α χρειάζεται x ώρες για να τελειώσει το έργο, όταν εργάζεται μόνο του, τότε το Β θα χρειάζεται $x + 12$ ώρες για το ίδιο έργο. Σε μία ώρα το Α εκτελεί τότε το $\frac{1}{x}$ μέρος του έργου ενώ το Β εκτελεί το $\frac{1}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν τα δύο μηχανήματα εργαστούν μαζί για 8 ώρες, τότε το Α εκτελεί το $8\frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ μέρος του έργου, ενώ το Β εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x + 12} = \frac{8}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μέρη

του έργου θα έχουμε ολόκληρο το έργο δηλαδή το 1 έργο. Έτσι έχουμε την εξίσωση του προβλήματος

$$\frac{8}{x}+\frac{8}{x+12}=1 \Leftrightarrow 8(x+12)+8x=x(x+12)$$

$$\Leftrightarrow 8x+96+8x=x^2+12x \Leftrightarrow x^2-4x-96=0.$$

Είναι $\Delta = 16 - 4(-96) = 400$, οπότε

$$x=\frac{4+20}{2}=12 \quad \text{ή} \quad x=\frac{4-20}{2}=-8.$$

Είναι δηλαδή $x = 12$, αφού $x > 0$. Επομένως το μηχάνημα Α χρειάζεται 12 ώρες γα να τελειώσει το έργο μόνο του, ενώ το Β χρειάζεται 24 ώρες.

10. Ο αριθμός 1 είναι ρίζα αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωση δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$1^4-10\cdot 1^2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=9.$$

Για $\alpha = 9$ η εξίσωση γίνεται

$$x^4-10x^2+9=0.$$

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται

$$y^2-10y+9=0.$$

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 9 και 1 οπότε έχουμε

$x^2 = 9$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3, –3, 1, –1.

4 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής $\alpha x + \beta > 0$ ή της μορφής $\alpha x + \beta < 0$, με α και β συγκεκριμένους αριθμούς.

Γενικότερα έχουμε:

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\alpha > 0$, τότε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha < 0$, τότε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$$

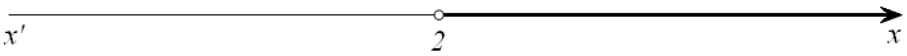
- Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x > -\beta$, η οποία
  - ✓ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι $\beta > 0$, ενώ
  - ✓ είναι αδύνατη, αν είναι $\beta \leq 0$.

Για παράδειγμα:

- Η ανίσωση $4x > 8$ γράφεται:

$$4x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{4} \Leftrightarrow x > 2.$$

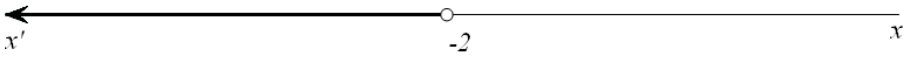
Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (2, +\infty)$



- Η ανίσωση $-4x > 8$ γράφεται:

$$-4x > 8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x < -2 .$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-\infty, -2)$.



- Η ανίσωση $0x > -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ η ανίσωση $0x > 2$ είναι αδύνατη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

i) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$2(x+4)-(x+6) < 12-x \qquad \text{και} \qquad 2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3} \geq 2(1+x)$$

ii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

ΛΥΣΗ

i) Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(x+4)-(x+6) < 12-x &\Leftrightarrow 2x+8-x-6 < 12-x \\ &\Leftrightarrow 2x-x+x < 12+6-8 \\ &\Leftrightarrow 2x < 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{10}{2} \\ &\Leftrightarrow x < 5 . \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x < 5$.

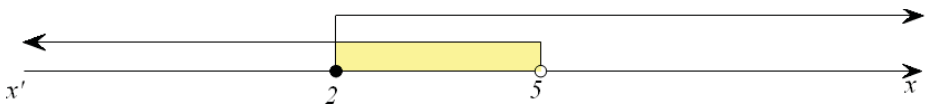
Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3} \geq 2(1+x) &\Leftrightarrow 12x+x+10 \geq 12(1+x) \\ &\Leftrightarrow 12x+x+10 \geq 12+12x \\ &\Leftrightarrow x \geq 2 . \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 2$

ii) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $x < 5$ και η δεύτερη για $x \geq 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $2 \leq x < 5$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [2,5)$.

Για τον προσδιορισμό των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων μας διευκολύνει να παραστήσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα (Σχήμα), απ΄όπου προκύπτει ότι $2 \leq x < 5$



Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, μπορούμε να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|x-2| < 3$.

ΛΥΣΗ

Η επίλυση της ανίσωσης $|x-2| < 3$, με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |x-2| < 3 &\Leftrightarrow 2-3 < x < 2+3 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5 \end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να λύσουμε την παραπάνω ανίσωση και με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

ως εξής:

$$\begin{aligned} |x-2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-1,5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|2x-1| > 5$.

ΛΥΣΗ

Από την ιδιότητα $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$ έχουμε :

$$|2x-1| > 5 \Leftrightarrow 2x-1 < -5 \text{ ή } 2x-1 > 5$$
$$\Leftrightarrow 2x < -4 \text{ ή } 2x > 6$$
$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$ **ii)** $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$ **iii)** $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$.

2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$3x-1 < x+5 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}.$$

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \quad \text{και} \quad x - \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} - 1.$$

4. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{Z}$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$2x - \frac{x-1}{8} > x \quad \text{και} \quad x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0.$$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| < 3$ **ii)** $|x-1| \le 4$ **iii)** $|2x+1| < 5$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| \ge 3$ **ii)** $|x-1| > 4$ **iii)** $|2x+1| \ge 5$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|2x-6| = 2x-6$ **ii)** $|3x-1| = 1-3x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

ii) $\frac{|x-1|-4}{2}+\frac{5}{3}<\frac{|x-1|}{3}$ **ii)** $\frac{|x|+1}{2}-\frac{2|x|}{3}>\frac{1-|x|}{3}$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-6x+9}\le 5$.

10. Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x-x_0|<\rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7,3)$.

11. Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου $(^\circ C)$ με τους βαθμούς Φαρενάϊτ $(^\circ F)$ είναι η $F=\frac{9}{5}C+32$. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $41^\circ F$ μέχρι $50^\circ F$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^\circ C$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $3\le 4x-1\le 6$ **ii)** $-4\le 2-3x\le -2$.

2. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $2\le |x|\le 4$ **ii)** $2\le |x-5|\le 4$.

3. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και M το μέσο του τμήματος AB.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-5|\le|x+3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

4. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και M το μέσο του τμήματος AB.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x-1|+|x-7|=6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x-1$ και $x-7$.

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δηλαδή οι $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &= \alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\\ &= \alpha\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right]\\ &= \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right].\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]} \qquad (1).$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- $\boldsymbol{\Delta>0}$. Τότε ισχύει $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &= \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]\\ &= \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\\ &= \alpha\left[x-\left(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right].\end{aligned}$$

  Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)},$$

  όπου $x_1,\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}.$$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$. Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]}$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχουμε:

- Αν $\Delta > 0$,τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου $x_1,\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν $\Delta = 0$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$ έχει $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -2$. Επομένως:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$$

✓ Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ έχει $\Delta = 9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 0$ και $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$. Επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

✓ Το τριώνυμο $2x^2-6x+5$ έχει $\Delta=-4<0$. Επομένως:

$$2x^2-6x+5=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

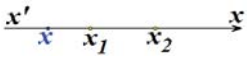
- Αν $\boldsymbol{\Delta>0}$, τότε ,όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)\ (1).$$

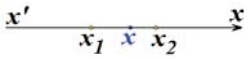
Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι:

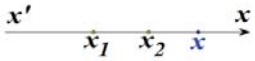
✓ Αν $x<x_1<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x_2<x$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



- Αν $\boldsymbol{\Delta=0}$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x\neq-\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\Delta < 0$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

  Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α**, μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma < 0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$, $\alpha \neq 0$, τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $2x^2 - 3x - 2 > 0$ **(ii)** $2x^2 - 3x - 2 < 0$

ΛΥΣΗ

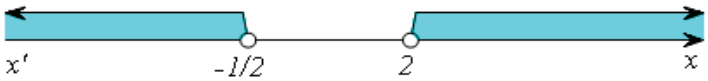
Ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 2 και, επειδή $\alpha = 2 > 0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

i) Η ανίσωση $2x^2-3x-2>0$ έχει λύσεις τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x<-\frac{1}{2}$ ή $x>2$, δηλαδή τα $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η ανίσωση $2x^2-3x-2<0$ έχει λύσεις τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $-\frac{1}{2}<x<2$, δηλαδή τα $x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2-3x-2\le 0$.

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, που είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x-2<0$ ή ρίζες της εξίσωσης $2x^2-3x-2=0$. Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x-2\le 0$ είναι τα $x\in\mathbb{R}$, με $-\frac{1}{2}\le x\le 2$, δηλαδή τα $x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

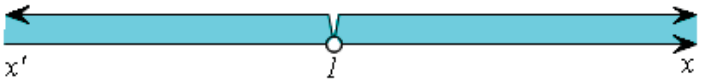
Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $x^2-2x+1>0$ **(ii)** $x^2-2x+1<0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-2x+1 είναι $\Delta=0$, οπότε έχει διπλή ρίζα την $x=1$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\ne 1$.

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, με $x \neq 1$, ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.
Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η **Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:**

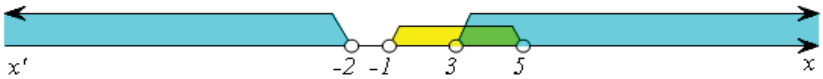
$$x^2 - 4x - 5 < 0 \quad \text{και} \quad x^2 - x - 6 > 0.$$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.
Έχουμε:

✓ $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

✓ $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$



Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (3,5)$.

2η **Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\alpha+1)x + \alpha + 4 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$**

i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.
ii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;
iii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
iv) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$;

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = \left[-(\alpha+1)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot(\alpha+4) = \alpha^2 - 2\alpha - 15 .$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$$\Delta' = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-15) = 64 > 0 .$$

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{2-8}{2} = -3 .$$

και το πρόσημο της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$.

iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\alpha = -3$ ή $\alpha = 5$.

iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλαδή $-3 < \alpha < 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ **ii)** $2x^2 - 3x - 2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$. **ii)** $\dfrac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49}$ **iii)** $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$.

3. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ **ii)** $4x^2 - 4x + 1$ **iii)** $x^2 - 4x + 13$.

4. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$ **iii)** $-x^2 + 2x - 2$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5x^2 \le 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \le 4$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \le 6x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 3x + 5 \le 0$ **ii)** $2x^2 - 3x + 20 > 0$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{4}\left(x^2 - 4x + 3\right) > 0$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2.$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + \left(2\beta - \alpha\right)x - \alpha\beta$.

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}$.

4. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

i) έχει ρίζες ίσες **ii)** έχει ρίζες άνισες **iii)** είναι αδύνατη.

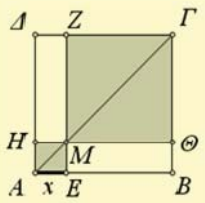
5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda,\ \lambda \neq -2$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0,\ \lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου M πάνω στη διαγώνιο $ΑΓ$ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. **i)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$.

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x)$, $B(x),\ldots,$ $\Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (τριώνυμα). Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1).$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

- ✓ Επειδή
$$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1,$$
το $x-1$ είναι θετικό για $x>1$, μηδέν για $x=1$ και αρνητικό για $x<1$.
- ✓ Επειδή
$$x^2+x-6\geq 0\Leftrightarrow (x+3)(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\leq -3 \text{ ή } x\geq 2,$$
το x^2+x-6 είναι θετικό για $x<-3$ και για $x>2$, μηδέν για $x=-3$ και για $x=2$ και αρνητικό για $-3<x<2$.
- ✓ Επειδή το $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1-8=-7<0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x^2+x+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ώστε το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $-3<x<1$ και για $x>2$, ενώ είναι αρνητικό για $x<-3$ και για $1<x<2$. Τέλος είναι μηδέν για $x=-3$, για $x=1$ και για $x=2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x)>0 \quad (<0)$

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x)>0 \quad (<0)$, όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)<0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του $P(x)$ διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)$.

Ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0 \quad (<0)$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}>0 \Leftrightarrow \mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)>0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}<0 \Leftrightarrow \mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)<0,$$

αφού, καμία από τις λύσεις της $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)>0$ και της $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)<0$ δεν μηδενίζει το $\mathrm{B}(x)$.

Για παράδειγμα , έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6}>0.$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)>0,$$

δηλαδή με την $P(x)>0$, η οποία, από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$ αληθεύει όταν $x\in(-3,1)\cup(2,+\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\dfrac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}\geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)\geq 0 \qquad \text{και} \qquad \mathrm{B}(x)\neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+3x-4\right)\geq 0 \text{ και } x^2+3x-4\neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3 είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου x^2+3x-4 είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x)=\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+3x-4\right)$$

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$P(x)$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου
$$P(x)=(2-3x)\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+1\right).$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου
$$P(x)=\left(-x^2+4\right)\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+x+1\right).$$

3. Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)\left(x^2+2\right)\left(x^2-9\right)>0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $(3-x)\left(2x^2+6x\right)\left(x^2+3\right)\leq 0$.

5. Να λύσετε την ανίσωση $\left(2-x-x^2\right)\left(x^2+2x+1\right)\leq 0$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $(x-3)\left(2x^2+x-3\right)\left(x-1-2x^2\right)>0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$ **ii)** $\dfrac{2x+1}{x-3} \le 0$.

8. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \le 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{2x+3}{x-1} > 4$ ii) $\dfrac{x-2}{3x+5} \le 4$.

2. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \le 0$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x}{3x-5} \le \dfrac{2}{x-1}$ ii) $\dfrac{x}{2x-1} \ge \dfrac{3}{x+2}$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 2$.

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος K και τα αντίστοιχα έσοδα E (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο $\sigma = \dfrac{20t}{t^2+4}$ mgr/lt. Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι $4\ mgr/lt$, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2+2x+\gamma \geq 0$ είναι αδύνατη τότε:

Α) $\gamma > -1$ Β) $\gamma = -1$ Γ) $\gamma < -1$ Δ) $\gamma \geq -1$.

2. Αν η ανίσωση $x^2-2x+\gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Α) $\gamma < 1$ Β) $\gamma = 1$ Γ) $\gamma > 1$ Δ) $\gamma \leq 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2+3\lambda x-\lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Α) $\lambda > 0$ Β) $\lambda < 0$ Γ) $\lambda = 1$ Δ) $\lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x-1|+|x-5|=4$ αληθεύει αν και μόνο αν:

Α) $x<1$ Β) $x>5$ Γ) $1 \leq x \leq 5$ Δ) $1<x<5$.

5. Η εξίσωση $|x-1|=x-1$:

Α) Είναι αδύνατη Β) Έχει μοναδική λύση τη $x=1$

Γ) Έχει άπειρες λύσεις Δ) Είναι ταυτότητα.

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Η ανίσωση $x^2+\lambda x+\lambda^2>0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Α Ψ

2. Η ανίσωση $\lambda^2x^2+4\lambda x+5 \leq 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Α Ψ

3. Οι ανισώσεις $x^2(x-1) \geq 0$ και $x-1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

4. Οι ανισώσεις $x^2(x-1) \leq 0$ και $x-1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

5. Οι ανισώσεις $\dfrac{2x-1}{x+1}>1$ και $2x-1>x+1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

6. Οι ανισώσεις $\dfrac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $x-1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

7. Οι ανισώσεις $\dfrac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $(x-1)(x-2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

8. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ και $(x-2)(x-1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

9. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} < 0$ και $(x-2)(x-1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

10. Οι ανισώσεις $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x+1}$ και $(x+1)^2 < (x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α΄ ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β΄ ομάδα.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2+6x-4$
2	x^2-3x+2
3	$-x^2+3x-2$
4	$2x^2-6x+4$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

IV. Να εντοπίσετε το <u>λάθος</u> στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x-6)(x-1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow 2x-6 > 0$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $x > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση $(x+2)^2(x-1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(x+2)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1. Ανισώσεις 1ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1)+3(2x+3)<2x$

$\Leftrightarrow 6x-6+6x+9<2x \Leftrightarrow 6x+6x-2x<6-9$

$\Leftrightarrow 10x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{10}.$

ii) $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x \Leftrightarrow 2(x-12)+2x+3>4x$

$\Leftrightarrow 2x-24+2x+3>4x$

$\Leftrightarrow 2x+2x-4x>24-3 \Leftrightarrow 0x>21$ αδύνατη.

iii) $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x-10+2-4x<x-4$

$\Leftrightarrow 5x-4x-x<10-2-4$

$\Leftrightarrow 0x<4$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. • $3x-1<x+5 \Leftrightarrow 3x-x<1+5 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3.$

• $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow x\ge 1.$

Άρα $1\le x<3$.

3. • $x-\frac{1}{2}>\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow 2x-1>x+2 \Leftrightarrow 2x-x>1+2 \Leftrightarrow x>3.$

• $x-\frac{1}{3}\le\frac{x}{3}-1 \Leftrightarrow 3x-1\le x-3 \Leftrightarrow 3x-x\le 1-3 \Leftrightarrow 2x\le -2 \Leftrightarrow x\le -1.$

Άρα <u>δεν</u> υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες <u>συναληθεύουν</u> οι ανισώσεις.

4. • $2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 16x - x - 8x > -1$

$\Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}$.

• $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 2x + x < 8 - 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$.

Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-\frac{1}{7}, \frac{7}{3})$. Οι ακέραιες τιμές του x στο διάστημα αυτό είναι οι 0, 1, 2.

5. i) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Άρα $x \in (-3, 3)$.

ii) $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - 4 \leq x \leq 1 + 4$
$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$. Άρα $x \in [-3, 5]$.

iii) $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -5 - 1 < 2x < 5 - 1$
$\Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$. Άρα $x \in (-3, 2)$.

6. i) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 3$. Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

ii) $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow x - 1 < -4$ ή $x - 1 > 4 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 5$.
Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.

iii) $|2x + 1| \geq 5 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq -5$ ή $2x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow 2x \leq -6$ ή $2x \geq 4$
$\Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 2$. Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

7. i) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.
Επομένως $|2x - 6| = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$.

ii) $|3x - 1| = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$.

8. i) $\frac{|x-1| - 4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3(|x - 1| - 4) + 10 < 2|x - 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x - 1| - 12 + 10 < 2|x - 1| \Leftrightarrow |x - 1| < 2$
$\Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Άρα $x \in (-1, 3)$.

ii) $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3} \Leftrightarrow 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|)$

$\Leftrightarrow 3|x| + 3 - 4|x| > 2 - 2|x|$

$\Leftrightarrow 3|x| - 4|x| + 2|x| > 2 - 3$

$\Leftrightarrow |x| > -1$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \le 5 \Leftrightarrow |x-3| \le 5$

$\Leftrightarrow -5 \le x - 3 \le 5 \Leftrightarrow 3 - 5 \le x \le 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8.$

Άρα $x \in [-2, 8]$.

10. Το κέντρο του διαστήματος $(-7, 3)$ είναι το $\frac{-7+3}{2} = -2$.

Έχουμε $x \in (-7, 3) \Leftrightarrow -7 < x < 3 \Leftrightarrow -7 - (-2) < x - (-2) < 3 - (-2)$

$\Leftrightarrow -7 + 2 < x + 2 < 3 + 2$

$\Leftrightarrow -5 < x + 2 < 5 \Leftrightarrow |x + 2| < 5.$

11. $41 \le \frac{9}{5}C + 32 \le 50 \Leftrightarrow 41 - 32 \le \frac{9}{5}C \le 50 - 32$

$\Leftrightarrow 9 \le \frac{9}{5}C \le 18 \Leftrightarrow 5 \le C \le 10.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $3 \le 4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$. Ζητάμε επομένως τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$.

- $3 \le 4x - 1 \Leftrightarrow 4 \le 4x \Leftrightarrow 4x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 1.$
- $4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 4x \le 7 \Leftrightarrow x \le \frac{7}{4}.$

Άρα $x \in [1, \frac{7}{4}]$.

ii) $-4 \le 2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -4 \le 2 - 3x$ και $2 - 3x \le -2$.

- $-4 \le 2 - 3x \Leftrightarrow 3x \le 6 \Leftrightarrow x \le 2.$
- $2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -3x \le -4 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}.$

Άρα $x \in [\frac{4}{3}, 2]$.

2. i) $2 \le |x| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x|$ και $|x| \le 4$.

- $2 \le |x| \Leftrightarrow |x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2$ ή $x \ge 2$.
- $|x| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4$.

Άρα $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$.

ii) $2 \le |x - 5| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x - 5|$ και $|x - 5| \le 4$.

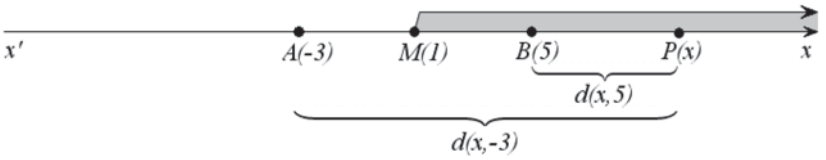
- $2 \le |x - 5| \Leftrightarrow |x - 5| \ge 2 \Leftrightarrow x - 5 \le -2$ ή $x - 5 \ge 2 \Leftrightarrow x \le 3$ ή $x \ge 7$.
- $|x - 5| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x - 5 \le 4 \Leftrightarrow 5 - 4 \le x \le 5 + 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 9$.

Άρα $x \in [1, 3] \cup [7, 9]$.

3. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί σε λύση της ανίσωσης, τότε: $|x - 5| \le |x + 3| \Leftrightarrow d(x, 5) \le d(x, -3) \Leftrightarrow PA \le PB$.



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Ρ βρίσκεται προς τα δεξιά του μέσου Μ του ΑΒ. Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in [1, +\infty)$.

iii) Έχουμε:

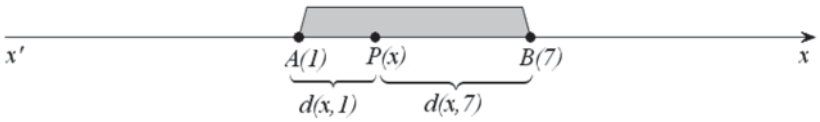
$$|x - 5| \le |x + 3| \Leftrightarrow |x - 5|^2 \le |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \le x^2 + 6x + 9$$
$$\Leftrightarrow -16x \le -16 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

4. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί στη λύση x της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow d(x, 1) + d(x, 7) = 6 \Leftrightarrow PA + PB = AB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P είναι σημείο του τμήματος AB. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x \in [1, 7]$.

iii) Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $x \in (-\infty, 1)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (1 - x) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται διότι $1 \notin (-\infty, 1)$.
- Αν $x \in [1, 7)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow 0x = 0$, που ισχύει για κάθε $x \in [1, 7)$.
- Αν $x \in [7, +\infty)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (x - 7) = 6 \Leftrightarrow x = 7$, που είναι δεκτή διότι $7 \in [7, +\infty)$. Επομένως, η εξίσωση αληθεύει για $x \in [1, 7]$.

§ 4.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Έχουμε: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

ii) Έχουμε: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ή $x = 2$.

Επομένως

$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

2. i) Είναι: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(2x + 1)(x - 2)} = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$, $x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$

ii) Έχουμε: $2x^2 + 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

Επειδή $\Delta = 4^2 - 4 \quad (-21) = 100$, θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -7 \end{matrix}$$

Επομένως $2x^2 + 8x - 42 = 2(x + 7)(x - 3)$.

Άρα: $\dfrac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49} = \dfrac{2(x + 7)(x - 3)}{(x + 7)(x - 7)} = \dfrac{2(x - 3)}{x - 7}$, $x \neq \pm 7$.

iii) • Για την εξίσωση $4x^2 - 12x + 9 = 0$, έχουμε

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$ (διπλή).

Επομένως $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - \frac{3}{2})^2 = (2x - 3)^2$.

• Για την $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{4} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{3}{2} \end{matrix}$

Επομένως $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - \frac{3}{2})(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$.

Άρα $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3} = \dfrac{(2x - 3)^2}{(2x - 3)(x - 1)} = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{3}{2}$

3. i) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 64$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		+	0	−	0	+	

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$		+	0	+	

iii) $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$, $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		+	

4. i) Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει $\alpha = -1$ και ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ii) Έχουμε $-9x^2 + 6x - 1 = -(9x^2 - 6x + 1) = -(3x - 1)^2$. Επομένως

x	$-\infty$		1/3		$+\infty$
$-9x^2+6x-1$		$-$	0	$-$	

iii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$ έχει $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ και $\alpha = -1 < 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+2x-2$		$-$	

5. i) Είναι: $5x^2 \leq 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 4) \leq 0$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 20x$ έχει $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5x^2-20x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [0, 4]$.

ii) Είναι: $x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [-4, 1]$.

6. i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, \frac{5}{2})$.

7. i) Είναι: $x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$.

ii) Είναι: $x^2 + 9 \leq 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

8. i) Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -11 < 0$. Άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ανίσωση $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ είναι αδύνατη.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 20$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και $\Delta = -151 < 0$. Άρα η ανίσωση $2x^2 - 3x + 20 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έχουμε $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (1, 3)$.

10. Έχουμε $2x - 1 < x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4$ και $x^2 - 4 < 12$.
• Είναι: $2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3\ +\infty)$.

• Είναι: $x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 16$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.

Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-4, -1) \cup (3, 4)$.

11. Έχουμε $x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$ και

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Άρα $x \in (1, 2) \cup (3, 5)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παράσταση $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = \alpha^2 + \beta \cdot \alpha - 2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-2\beta^2) = 9\beta^2 \geq 0 \text{ και ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm 3\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow \beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$.

• Ομοίως η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha - 6\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-6\beta^2) = 25\beta^2 \text{ και ρίζες } \alpha_{3,4} = \frac{\beta \pm 5\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow 3\beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)$.

ii) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - \beta\beta^2} = \dfrac{(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}$, $\alpha \neq 3\beta$, $\alpha \neq -2\beta$.

2. $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 0$.

$\Delta = (2\beta - \alpha)^2 - 4 \cdot 2(-\alpha\beta) = 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta$
$= 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 = (2\beta + \alpha)^2 \geq 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \dfrac{-(2\beta - \alpha) \pm (2\beta + \alpha)}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{\alpha}{2} \\ \searrow -\beta \end{matrix}$

Άρα $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 2(x - \frac{\alpha}{2})(x + \beta) = (2x - \alpha)(x + \beta)$.

3. • Έχουμε $x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta = x(x - \alpha) + \beta(x - \alpha) = (x - \alpha)(x + \beta)$.

• Το τριώνυμο $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$ έχει ρίζες $x_1 = \alpha$ και $x_2 = 2\alpha$ οπότε $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = (x - \alpha)(x - 2\alpha)$. Επομένως

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2} = \frac{(x-\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x-2\alpha)} = \frac{x+\beta}{x-2\alpha}, \text{ με } x \neq \alpha,\ x \neq 2\alpha.$$

4. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda + 5) = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 5\lambda^2 - 20\lambda.$$

Η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή λ, $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 4$.

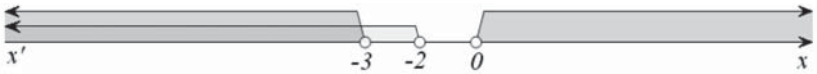
λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$		+	0	−	0	+	

Επομένως η δοθείσα εξίσωση
i) έχει ρίζες ίσες, αν $\lambda = 4$, διότι $\lambda \neq 0$.
ii) έχει ρίζες άνισες αν $\lambda \neq -2$ με $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$.
iii) είναι αδύνατη αν $0 < \lambda < 4$.

5. Το τριώνυμο $x^2 + 3\lambda x + \lambda$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda$.
Για να είναι $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$.
Έχουμε $\Delta < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \frac{4}{9})$.

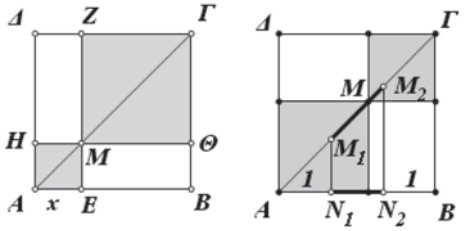
6. i) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 3\lambda \cdot (\lambda + 2) = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$.
$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 + 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda > 0$
$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$.

ii) Η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$ και $\lambda < -2$.



Άρα $\lambda < -3$.

7. Αν x είναι η πλευρά του ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του άλλου θα είναι $3 - x$ και άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων θα είναι ίσο με $x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.



Επομένως, για να είναι το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων μικρότερο από 5 θα πρέπει να ισχύει:

$2x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Άρα το Μ θα πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία M_1 και M_2, τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη.

8. i) Η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$. Ο συντελεστής του α^2 είναι $1 > 0$. Άρα

$$\alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2 \geq 0, \text{ για όλα τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}$. Επομένως

- Αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.

§ 4.3. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$2-3x$		+		+	0	–		–	
x^2-x-2		+	0	–		–	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

2. Έχουμε:

- $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

3. Έστω $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9)$. Έχουμε:

- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 3$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

4. Έστω $P(x) = (3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3)$. Έχουμε:

- $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
- $2x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 0$.
- $x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+6x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty)$.

5. Έστω $P(x) = (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1)$. Έχουμε:

• $2 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.

• $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0$,
οπότε $(x + 1)^2 > 0$, για $x \neq -1$ και $(x + 1)^2 = 0$ για $x = -1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$2-x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2+2x+1		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

6. Έστω $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0$. Έχουμε:

• $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

• $2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ ή $x \geq 1$.

• $x - 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 \geq 0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$, $\alpha = -2 < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1-2x^2$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, 3)$.

7. i) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) \leq 0$, με $x \neq 3$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3$.

8. $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \leq 0$, με $x^2 + x - 2 \neq 0$.

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2)$. Έχουμε:

• $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

• $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+		+	0	–		–	0	+	
$x^2 + x - 2$		+	0	–		–	0	+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup (1, 2]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\dfrac{2x + 3}{x - 1} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 3}{x - 1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 3 - 4x + 4}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x + 7}{x - 1} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 7}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \dfrac{7}{2}$.

ii) $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2}{3x + 5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2 - 12x - 20}{3x + 5} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-11x - 22}{3x + 5} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{11x + 22}{3x + 5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x + 2)(3x + 5) \geq 0$, με $x \neq -\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x > -\dfrac{5}{3}$.

Άρα $x \in (-\infty, -2] \cup (-\dfrac{5}{3}, +\infty)$.

2. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x - 10 + 2x - 2}{x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 1} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x - 1) \leq 0$, με $x \neq 1$.

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 12)(x - 1)$. Έχουμε:

• $x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 4$.

• $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+	0	–	0	–	0	+	
$x - 1$		–		–	0	+		+	
$P(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4]$.

3. i) $\dfrac{x}{3x-5} \le \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-5} - \dfrac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \le 0, \text{ με } x \ne 1,\ x \ne \frac{5}{3}.$$

Έστω $P(x) = (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

- $3x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{3}$.
- $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.
- $x^2-7x+10 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$ ή $x \ge 5$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		2		5		$+\infty$
$3x-5$		–		–	0	+		+		+	
$x-1$		–	0	+		+		+		+	
$x^2-7x+10$		+		+		+	0	–	0	+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $\dfrac{x}{3x-5} \le \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \le 0$,

$x \ne 1,\ x \ne \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x \in (1, \dfrac{5}{3}) \cup [2, 5]$.

ii) $\dfrac{x}{2x-1} \ge \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2x-1} - \dfrac{3}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) \ge 0, \text{ με } x \ne -2,\ x \ne \frac{1}{2}.$$

Έστω $P(x) = (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+		+		+	0	–	0	+	
$2x-1$		–		–	0	+		+		+	
$x+2$		–	0	+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (\dfrac{1}{2}, 1] \cup [3, +\infty)$.

4. Έχουμε: $\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} < -2$ ή $\dfrac{x+1}{x} > 2,\ x \neq 0.$

- $\dfrac{x+1}{x} < -2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x} < 0$

$$\Leftrightarrow (3x+1)x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 0.$$

- $\dfrac{x+1}{x} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} < 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup (0, 1)$.

5. Για να έχει η εταιρεία κέρδος πρέπει να έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος:

$E > K \Leftrightarrow 5x - x^2 > 7 - x \Leftrightarrow 5x - x^2 - 7 + x > 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 < 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Επομένως

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}.$$

ή, προσεγγιστικά, $1{,}59 < x < 4{,}41$.

6. Έχουμε: $\dfrac{20t}{t^2+4} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{20t}{t^2+4} - 4 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{20t - 4t^2 - 16}{t^2+4} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 20t - 16}{t^2+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 20t + 16}{t^2+4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(t^2 - 5t + 4)(t^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Η έννοια της ακολουθίας

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 10000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με επιτόκιο 2%. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο οι τόκοι που θα αποδώσει το κεφάλαιο προστίθενται σε αυτό και το ποσό που προκύπτει ξανατοκίζεται για τον επόμενο χρόνο με το ίδιο επιτόκιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσα χρόνια θέλουμε. Επομένως, το κεφάλαιο των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 1 χρόνο:
$10000 + 0{,}02 \cdot 10000 = 10000(1 + 0{,}02) = 10200$ ευρώ.

Σε 2 χρόνια:
$10000 \cdot 1{,}02 + 0{,}02 \cdot (10000 \cdot 1{,}02) = 10000\ 1{,}02 \cdot (1+0{,}02) = 10000 \cdot (1{,}02)^2$
$= 10404$ ευρώ.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσό των 10000 ευρώ θα γίνει: Σε 3 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^3$ ευρώ, σε 4 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^4$ ευρώ κτλ. και σε ν χρόνια θα γίνει $10000 \cdot (1{,}02)^{\nu}$ ευρώ.
Έτσι έχουμε τον πίνακα:

Χρόνια: ν	1	2	3	...	ν	...
Κεφάλαιο σε ν χρόνια	$10000 \cdot 1{,}02$	$10000 \cdot (1{,}02)^2$	$10000 \cdot (1{,}02)^3$	...	$10000 \cdot (1{,}02)^{\nu}$	...

Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός ακέραιος ν αντιστοιχίζεται στον πραγματικό αριθμό $10000 \cdot (1{,}02)^{\nu}$.
Η παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,...,ν,... στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε

συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$.

Δηλαδή, $1 \to \alpha_1$, $2 \to \alpha_2$, $3 \to \alpha_3$, ..., $\nu \to \alpha_\nu$, ... Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν). Παραδείγματα.

i) Η αντιστοίχιση $1 \to 1^2$, $2 \to 2^2$, ... $\nu \to \nu^2$, ... είναι η ακολουθία (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1^2$, δεύτερο όρο $\alpha_2 = 2^2$ κλπ. και γενικό όρο $\alpha_\nu = \nu^2$.

ii) Η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ έχει όρους: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$,...

iii) Η ακολουθία (α_ν) με ν-οστό όρο $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ έχει όρους: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}$, ...

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Στην ακολουθία 1^2, 2^2, 3^2, ..., ν^2, ... ο γενικός της όρος $\alpha_\nu = \nu^2$ μας επιτρέπει να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της. Είναι π.χ. $\alpha_{20} = 20^2 = 400$, $\alpha_{100} = 100^2 = 10000$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και ακολουθίες που για το γενικό τους όρο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος.

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία (α_ν), της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 1, ο δεύτερος όρος είναι επίσης το 1 και κάθε άλλος όρος, από τον τρίτο και μετά, είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$$

Έχουμε:

$$\alpha_3 = 1 + 1 = 2, \quad \alpha_4 = 2 + 1 = 3, \quad \alpha_5 = 3 + 2 = 5, \quad \alpha_6 = 5 + 3 = 8, \quad \text{κτλ.}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (α_ν) είναι τελείως ορισμένη.

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$ λέγεται **αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

(i) Τον αναδρομικό της τύπο και

(ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

ΣΧΟΛΙΟ:

Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο

για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο **Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους και τους 20ους όρους των ακολουθιών:**

i) $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 3$ **ii)** $\beta_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{2\nu - 1}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\alpha_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 = -1$, $\alpha_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$

$\alpha_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$, $\alpha_4 = 2 \cdot 4^2 - 3 = 29$

και $\alpha_{20} = 2 \cdot 20^2 - 3 = 797$

ii) Έχουμε $\beta_1 = \dfrac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1$, $\beta_2 = \dfrac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \dfrac{1}{3}$

$\beta_3 = \dfrac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\dfrac{1}{5}$, $\beta_4 = \dfrac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \dfrac{1}{7}$

και $\beta_{20} = \dfrac{(-1)^{20}}{2 \cdot 20 - 1} = \dfrac{1}{39}$

2ο **Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$. Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερις όροι της ακολουθίας.**

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$\alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$
$$\alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 677$$

3ο Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu+5$. Να οριστεί η ακολουθία αυτή και αναδρομικά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [3(\nu+1)+5] - (3\nu+5)$

$= 3\nu + 3 + 5 - 3\nu - 5$

$= 3$

Άρα $\alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu$ που είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας.

Επειδή $\alpha_1 = 3\cdot 1 + 5 = 8$, η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\alpha_1 = 8 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$ ii) $\alpha_\nu = 2^\nu$ iii) $\alpha_\nu = \nu^2 + \nu$ iv) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 - 1}{\nu + 1}$

v) $\alpha_\nu = \left(-\dfrac{1}{10}\right)^{\nu-1}$ vi) $\alpha_\nu = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^\nu$ vii) $\alpha_\nu = |5 - \nu|$ vii) $\alpha_\nu = \eta\mu\dfrac{\nu\pi}{4}$

ix) $\alpha_\nu = \dfrac{2^\nu}{\nu^2}$ x) $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}\cdot\dfrac{1}{\nu}$ xi) $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 2,\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ ii) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$ iii) $\alpha_1 = 3,\ \alpha_{\nu+1} = 2(\alpha_\nu - 1)$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i) $\alpha_\nu = \nu + 5$ ii) $\alpha_\nu = 2^\nu$ iii) $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ iv) $\alpha_\nu = 5\nu + 3$

4. Να βρείτε το $\nu^{\underline{o}}$ όρο των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 1,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ ii) $\alpha_1 = 3,\ \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

— Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7,... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2**.

— Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, –5, –10,... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού –5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά –5**.

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το $\nu^{\underline{o}}$ όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, ω και ν ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.
Επομένως

> Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
> $$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9, ..., η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 5 - 3 = 2$, ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1) \cdot 2$. Επομένως ο $20^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$, ο $100^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$ κτλ.

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega, \qquad \text{επομένως} \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \qquad \text{ή} \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta,$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
> αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4,... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της

$$S_{100} = 1+2+3+...+98+99+100$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμα τους ως εξής:
Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$\begin{array}{l} S_{100} = 1+2+3+...+98+99+100 \\ S_{100} = 100+99+98+...+3+2+1 \\ \hline 2S_{100} = (1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1) \end{array}$$

ή $2S_{100} = 101+101+101+...+101+101+101$

ή $2S_{100} = 100 \cdot 101$, άρα $S_{100} = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Έχουμε: $S_\nu = \alpha_1+(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+2\omega) + ... + [\alpha_1+(\nu-2)\omega]+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

και $S_\nu = \alpha_\nu+(\alpha_\nu-\omega)+(\alpha_\nu-2\omega) + ... + [\alpha_\nu-(\nu-2)\omega]+[\alpha_\nu-(\nu-1)\omega]$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu) + ... + (\alpha_\nu+\alpha_1)+(\alpha_\nu+\alpha_1)$$

ή $2S_\nu = \nu(\alpha_1+\alpha_\nu)$. Άρα $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$

Επειδή $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, ο τύπος $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$ γράφεται:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να βρεθεί το άθροισμα 7+10+13 + ··· + 157

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = 157$ και $\omega = 3$. Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος ν των προσθετέων. Από τον τύπο του $\nu^{\text{ου}}$ όρου $\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega$ έχουμε

$$157 = 7+(\nu-1)3 \Leftrightarrow 7+(\nu-1)3 = 157$$
$$\Leftrightarrow 7+3\nu-3 = 157$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 153$$
$$\Leftrightarrow \nu = 51$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7+157) = 4182$$

2ο Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου 52, 47, 42,... έχουν άθροισμα ίσο με 90;

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_1 = 52$, $\omega=47-52=-5$ και $S_\nu = 90$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$, έχουμε

$$90 = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 52+(\nu-1)(-5)\right] \Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(109-5\nu)$$
$$\Leftrightarrow 5\nu^2-109\nu+180=0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad \nu = 20$$

Επειδή όμως $\nu\in\mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι ν = 20. Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

3ο Ο $10^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο $19^{\text{ος}}$ όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega$ έχουμε $42 = \alpha_1+\omega$ και $87 = \alpha_1+18\omega$.

Επομένως οι α_1 και ω είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 + 9\omega = 42 \\ \alpha_1 + 18\omega = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 5$.

Επομένως

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{100}{2}\left[2(-3) + 99 \cdot 5\right] \\ &= 50(-6 + 495) \\ &= 24450 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $\nu^{\underline{o}}$ όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13,... ii) 11, 13, 15,... iii) 5, 2, -1,...

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3,... v) – 6, – 9, – 12,...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον α_{15} της – 2, 3, 8... ii) Τον α_{20} της 11, 18, 25,... iii) Τον α_{30} της 4, 15, 26,...

iv) Τον α_{35} της 17, 25, 33,... v) Τον α_{50} της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$,...

vi) Τον α_{47} της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2,...

3. i) Αν ο $6^{\underline{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο $10^{\underline{ος}}$ όρος είναι 16, να βρείτε τον $1^{\underline{ο}}$ όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$

iii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$.

4. i) Ο $5^{\underline{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι –5 και ο $15^{\underline{ος}}$ όρος της είναι –2. Να βρείτε τον $50^{\underline{ο}}$ όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική προόδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

5. i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με –97;

6. i) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και –40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x + 1$ και 11 είναι ο $3x - 2$.

7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.

8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 9, 11,... ii) 0, 2, 4,.... iii) 6, 10, 14,...
iv) –7, –2, +3,...

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 2, –1, –4,... ii) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \ldots$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) 1+5+9 + ... + 197 ii) 9+12+15 + ... + 90 iii) –7–10–13–...–109

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;

i) 4, 8, 12,... ii) 5, 10, 15,...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο $ν^{ος}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $α_ν = 12–4ν$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της $α_1$ και τη διαφορά της ω.

2. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών, ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199,

ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $α_ν = 5ν–4$,

ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $α_ν = –5ν–3$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7,... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα $α_1$ ω, ν, $α_ν$ και $S_ν$ ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

$α_1$	ω	ν	$α_ν$	$S_ν$
120	–10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	–8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά

βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων].**

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 + \frac{\nu - 1}{\nu} + \frac{\nu - 3}{\nu} + ... + \frac{1}{\nu}$

11. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: Το 1° μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

— Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2**.

— Στην ακολουθία 27, –9, 3, –1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί $-\frac{1}{3}$. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** $-\frac{1}{3}$.
Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος,** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\boldsymbol{\alpha_\nu \neq 0}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda}$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και το λόγο της λ, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το $\nu^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, λ και ν ως εξής:
Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1\lambda \\
\alpha_3 &= \alpha_2\lambda \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2}\lambda \\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1}\lambda
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$
Επομένως

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι
$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, –6, 12, –24,... η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{-6}{3} = -2$, ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 \cdot (-2)^{\nu-1}$. Επομένως ο $5^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_5 = 3(-2)^4 = 48$, ο δέκατος όρος της είναι $\alpha_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$ κτλ.

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ≠ 0 ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27,... στην οποία είναι $\alpha_1 = 1$ και λ = 3, και ας βρούμε το άθροισμα S_7 των 7 πρώτων όρων της.
Έχουμε

$$S_7 = 1+3+9+27+81+243+729 \qquad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμα τους ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ=3 και έχουμε

$$3S_7 = 3+9+27+81+243+729+2187 \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$3S_7 - S_7 = 2187-1$$
$$2S_7 = 2186$$
$$S_7 = 1093$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο λ ≠ 1 είναι
> $$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1} \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$

ή $$(\lambda-1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι λ=1, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο **Να βρεθεί ο $\nu^{ος}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $4^{ος}$ όρος είναι $\frac{3}{4}$ και ο $9^{ος}$ όρος της είναι $-\frac{3}{128}$**

ΛΥΣΗ

Έστω α_1 ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της. Τότε έχουμε:

$$\alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_1\lambda^{9-1} = \alpha_1\lambda^8 = -\frac{3}{128}$$

Επομένως

$$\frac{\alpha_1\lambda^8}{\alpha_1\lambda^3} = \left(-\frac{3}{128}\right):\frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην $\alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$ και έχουμε

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = -6$$

Άρα ο ν^{ος} όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$, είναι $\alpha_\nu = (-6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$

2^{ο} Να υπολογιστεί το άθροισμα $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{256}$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, πρέπει να ξέρουμε το πλήθος ν των όρων.

Από τον τύπο όμως του ν^{ου} όρου $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε:

$\frac{1}{256} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ και επομένως $\nu-1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{1022}{512} = \frac{511}{256}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το ν^{ο} όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) 3, 6, 12, ... ii) $\frac{2}{3}$, 2, 6,... iii) 9, 27, 81, ...

iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, ... v) 16', 8, 4, ... vi) 18, 6, 2, ...

vii) 1, 0,4, 0,16, ... vii) –2, 4, –8, ... ix) –3, 9, –27, ...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...$ ii) Τον α_7 της $2, 6, 18, ...$

iii) Τον α_8 της $729, 243, ...$ iv) Τον α_{10} της $1 -2, 4, ...$

v) Τον α_9 της $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, ...$

3. i) Να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $5^{ος}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο $4^{ος}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $3^{ος}$ όρος είναι 12 και ο $6^{ος}$ όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο $2^{ος}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{ος}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$

5. Να βρείτε:

i) τον α_{14} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

ii) τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12,.... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. i) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16,... που υπερβαίνει το 2000.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32,..., που είναι μικρότερος του 0,25.

8. i) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4,... ii) 3, 9, 27,... iii) –4, 8, –16,...

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) 2+8+32 + ··· + 8192 ii) $4+2+1 + \cdots + \frac{1}{512}$

iii) 1+(–2)+4 + ··· + 256.

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

2. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}, \sqrt[4]{10\nu+4}, \sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 34$ και $\alpha_3 + \alpha_7 = 68$.

6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν).

- Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (I_ν).

- Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C′ έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C″ έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C′ και C″ υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C′ και C″ 13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i) το λόγο της προόδου,

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ. Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε:

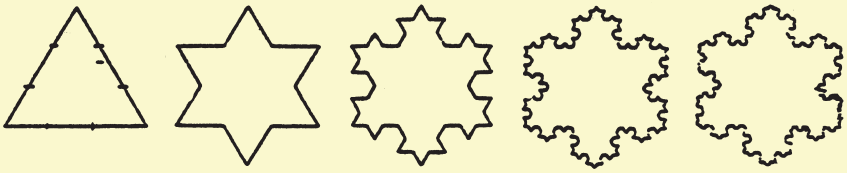
i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας (D_ν).

ii) Την ποσότητα του αντιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.

Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο $\frac{1}{3}$ κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.



i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (S_ν) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.

ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (U_ν) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.

5.4 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ - ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Με τη βοήθεια των γεωμετρικών προόδων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως, που συχνά παρουσιάζονται στις συναλλαγές με πιστωτικούς οργανισμούς.

Ανατοκισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για ν χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του $\nu^{ου}$ χρόνου.**
(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού).

ΛΥΣΗ

Στο τέλος του $1^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο α θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\varepsilon}{100}\alpha = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του $2^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο α_1 θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha_1$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon}{100}\alpha_1 = \alpha_1\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του $3^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο α_2 μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3 = \alpha_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \text{κτλ.}$$

και γενικά στο τέλος του $\nu^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, αν είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$ και $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{100}$.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του $\nu^{ου}$ όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του $\nu^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο α μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$$

ή $$\alpha_\nu = \alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

Αν θέσουμε $\frac{\varepsilon}{100} = \tau$, που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha\,(1+\tau)^\nu}$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Καταθέτουμε με ανατοκισμό κεφάλαιο 10000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί τι ποσό θα εισπράξουμε ύστερα από 10 χρόνια.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu$, ύστερα από 10 χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$$\begin{aligned}\alpha_{10} = 10000 \cdot (1+0{,}02)^{10} &= 10000 \cdot (1{,}02)^{10}\\ &= 10000 \cdot 1{,}218994\\ &= 12189{,}94 \text{ ευρώ.}\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Τη δύναμη $(1{,}02)^{10}$ την υπολογίζουμε με τη βοήθεια πινάκων ή με έναν υπολογιστή τσέπης.

Ίσες καταθέσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α ευρώ με ανατοκισμό και επιτόκιο ε%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από ν χρόνια;**
(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των ίσων καταθέσεων)

ΛΥΣΗ

Η 1η κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν χρόνια και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα γίνει $\alpha(1+\tau)^\nu$, όπου $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$.

Η 2η κατάθεση θα ανατοκιστεί να ν–1 χρόνια και επομένως θα γίνει $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κτλ. και η νη κατάθεση θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει $\alpha(1+\tau)$. Συνεπώς ύστερα από ν χρόνια θα πάρουμε το ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= \alpha(1+\tau)^{\nu}+\alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \cdots + \alpha(1+\tau)\\ &= \alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2 + \cdots + \alpha(1+\tau)^{\nu}\\ &= \alpha(1+\tau)[1+(1+\tau)+(1+\tau)^2 + \cdots + (1+\tau)^{\nu-1}]\\ &= \alpha(1+\tau)\bullet\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{(1+\tau)-1}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\Sigma = \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος των ίσων καταθέσεων**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αρχή κάθε χρόνου καταθέτουμε στην τράπεζα ποσό 10000 ευρώ με ανατοκισμό και με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από 10 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ύστερα από 10 χρόνια θα πάρουμε ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= 10000\cdot(1+0{,}02)\cdot\frac{(1+0{,}02)^{10}-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 1{,}02\cdot\frac{(1{,}02)^{10}-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 1{,}02\cdot\frac{1{,}218994-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 11{,}168694 = \mathbf{111686{,}94}\ \text{ευρώ.}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για την επίλυση των ασκήσεων να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δανείζει κάποιος 5000 ευρώ με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ύστερα από 5 χρόνια;

2. Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για να πάρει ύστερα από 10 χρόνια συνολικά 50.000 ευρώ;

3. Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο, κεφάλαιο 10.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο ανά έτος, γίνεται ύστερα από 5 χρόνια 12.762 ευρώ;

4. Στην αρχή κάθε χρόνου και για 5 συνεχή χρόνια καταθέτουμε 5.000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα πάρουμε στο τέλος του 5^{ου} έτους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 5.1. Ακολουθίες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) 3, 5, 7, 9, 11 ii) 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30 iv) 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, –0,1, 0,01, –0,001, 0,0001 vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}$

vii) 4, 3, 2, 1, 0 viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$ x) 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

xi) 1, –1, 1, –1, 1.

2. i) 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2 ii) 0, 1, 2, 5, 26

iii) 3, 4, 6, 10, 18.

3. i) Έχουμε $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (\nu + 1) + 5 - \nu - 5 = 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu. \end{cases}$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu. \end{cases}$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 1 = 2 \cdot 2^\nu - 1 = 2 \cdot (1 + \alpha_\nu) - 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1. \end{cases}$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) + 3 - 5\nu - 3 = 5$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu \end{cases}$

4. i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = \alpha_1 + 2$
$\alpha_3 = \alpha_2 + 2$
.....
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2$

Προσθέτουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:

$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)2$ ή $\alpha_\nu = 2\nu - 1$.

ii) $\alpha_1 = 3$
$\alpha_2 = 5\alpha_1$
$\alpha_3 = 5\alpha_2$
.....
$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1}$.

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:
$\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§ 5.2. Αριθμητική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 7 + (\nu - 1) \cdot 3 = 3\nu + 4$

ii) $\alpha_\nu = 11 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 9$

iii) $\alpha_\nu = 5 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

v) $\alpha_\nu = -6 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu - 3$.

2. i) $\alpha_{15} = -2 + (15 - 1) \cdot 5 = 68$

ii) $\alpha_{20} = 11 + (20 - 1) \cdot 7 = 144$

iii) $\alpha_{30} = 4 + (30 - 1) \cdot 11 = 323$

iv) $\alpha_{35} = 17 + (35 - 1) . 8 = 289$

v) $\alpha_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{101}{3}$

vi) $\alpha_{47} = \frac{1}{2} + (47 - 1) \cdot \frac{3}{4} = 35$.

3. i) Έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega$, επομένως $\alpha_1 + 5\omega = 12$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$, επομένως $\alpha_1 + 9\omega = 16$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases}$

βρίσκουμε $\boldsymbol{\omega = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha_1 = 7}$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 4} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = -2}.$$

iii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 3} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = 14}.$$

4. i) Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega = -2 \end{cases}$

από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε ότι

$$\omega = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{ και } \alpha_1 = -6{,}2$$

Άρα $\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\omega = -6{,}2 + 49 \cdot 0{,}3 = 8{,}5$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega = 145 \end{cases}$

οπότε $\omega = 6$ και $\alpha_1 = 19$

Άρα $\alpha_{18} = \alpha_1 + 17\omega = 19 + 17 \cdot 6 = \mathbf{121}$.

5. i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$97 = 2 + (\nu - 1)5 \Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)5 = 97$$
$$\Leftrightarrow 5\nu = 100 \Leftrightarrow \nu = 20.$$

Επομένως ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}, δηλαδή ο 20ος.

ii) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$-97 = 80 + (\nu - 1)(-3) \Leftrightarrow 80 + (\nu - 1)(-3) = -97$$
$$\Leftrightarrow -3\nu = -180 \Leftrightarrow \nu = 60$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο $\boldsymbol{\alpha_{60}}$.

6. i) $\dfrac{10 - 40}{2} = \dfrac{-30}{2} = \mathbf{-15}$

ii) $\dfrac{(5x + 1) + 11}{2} = 3x - 2 \Leftrightarrow 5x + 12 = 6x - 4 \Leftrightarrow -x = -16 \Leftrightarrow \mathbf{x = 16}$.

7. Αν είναι x ο μεγαλύτερος αριθμός και y ο μικρότερος τότε ισχύει:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \dfrac{x + y}{2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι $\mathbf{x = 30}$ και $\mathbf{y = 20}$.

8. i) Έχουμε $\alpha_1 = 7$, $\omega = 9 - 7 = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 7 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 92 = \mathbf{1840}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 0$, $\omega = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 0 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 78 = \mathbf{1560}$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 6$, $\omega = 4$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 6 + (40 - 1) \cdot 4] = 20 \cdot 168 = \mathbf{3360}$$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = 5$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot (-7) + (40 - 1) \cdot 5] = 20 \cdot 181 = \mathbf{3620}.$$

9. i) Έχουμε $\alpha_1 = 2$, $\omega = -3$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot 2 + (80 - 1)(-3)] = 40 \cdot (-233) = \mathbf{-9320}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (80 - 1) \cdot \frac{2}{3}] = 40 \cdot 52 = \mathbf{2080}.$$

10. Καθένα από τα αθροίσματα είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.

i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_\nu = 197$ και $\omega = 4$.
Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ οπότε $197 = 1 + (\nu - 1) \cdot 4$ ή $\nu = 50$.
Επομένως

$$S = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{50}{2}(1 + 197) = \mathbf{4950}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 9$, $\omega = 3$, $\alpha_\nu = 90$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $90 = 9 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 28$.
Επομένως

$$S_{28} = \frac{28}{2}(9 + 90) = 14 \cdot 99 = \mathbf{1386}.$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = -3$, και $\alpha_\nu = -109$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $-109 = -7 + (\nu - 1)(-3)$ ή $\nu = 35$.
Επομένως

$$S_{35} = \frac{35}{2}(-7 - 109) = \frac{35}{2} \cdot (-116) = \mathbf{-2030}.$$

11. i) Έχουμε $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$ και $S_\nu = 180$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$, έχουμε

$$180 = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 4 + (\nu - 1) \cdot 4] \Leftrightarrow 180 = \frac{\nu}{2}(4\nu + 4)$$
$$\Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu = 360$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases}$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{N}^*$, έπεται ότι $\boldsymbol{\nu = 9}$. Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $S_\nu = 180$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $\boldsymbol{\nu = 8}$.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 53$, $\omega = -2$ και $\nu = 15$.
Επομένως $\alpha_{15} = 53 + (15 - 1)(-2) = 53 - 28 = \mathbf{25}$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(25 + 53) = \frac{15}{2} \cdot 78 = \mathbf{585}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 12 - 4(\nu + 1) - 12 + 4\nu$
$= 12 - 4\nu - 4 - 12 + 4\nu = -4.$

Επομένως $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 4$ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\mathbf{-4}$ και $\alpha_1 = 12 - 4 \cdot 1 = \mathbf{8}$.

2. i) Οι περιττοί αριθμοί είναι οι 1, 3, 5, 7 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{200} = 1 + (200 - 1) \cdot 2 = 399$, οπότε

$$S_{200} - \frac{200}{2} \cdot (1 + 399) = 100 \cdot 400 = \mathbf{40000}.$$

ii) Οι άρτιοι αριθμοί είναι οι 2, 4, 6, 8 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{300} = 2 + (300 - 1)2 = 600$, οπότε

$$S_{300} - \frac{300}{2} \cdot (2 + 600) = 150 \cdot 602 = \mathbf{90300}.$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το 17 + 19 + ... + 379 και οι προσθετέοι του, με τη σειρά που είναι γραμμένοι, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 17$, $\omega = 2$ και $\alpha_\nu = 379$.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε $379 = 17 + (\nu - 1)2$ ή $\nu = 182$.
Επομένως

$$S_{182} - \frac{182}{2}(17 + 379) = 91 \cdot 396 = \mathbf{36036}.$$

3. i) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $5 + 10 + 15 + ... + 195$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $\alpha_\nu = 195$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $195 = 5 + (\nu - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow \nu = 39$.
Επομένως

$$S_{39} = \frac{39}{2}(5 + 195) = 39 \cdot 100 = \mathbf{39000}.$$

ii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $12 + 15 + ... + 198$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 12$, $\omega = 3$ και $\alpha_\nu = 198$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $198 = 12 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 63$.
Επομένως

$$S_{63} = \frac{63}{2}(12 + 198) = \frac{63}{2} \cdot 210 = 63 \cdot 105 = \mathbf{6615}.$$

4. i) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) - 4 - 5\nu + 4 = 5$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$, $\omega = 5$ και $\alpha_{30} = 5 \cdot 30 - 4 = 146$, οπότε

$$S_{30} = \frac{30}{2}(1 + 146) = 15 \cdot 147 = \mathbf{2205}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5(\nu + 1) - 3 + 5\nu + 3$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5 \cdot 1 - 3 = -8$, $\omega = -5$ και $\alpha_{40} = -5 \cdot 40 - 3 = -203$, οπότε

$$S_{40} = \frac{40}{2}(-8 - 203) = 20 \cdot (-201) = \mathbf{-4220}.$$

5. Πρέπει από το άθροισμα $1 + 2 + 3 + ... + 200$ να αφαιρέσουμε το άθροισμα $4 + 8 + 12 + ... + 200$ των πολλαπλασίων του 4 και το άθροισμα $9 + 18 + 27 + ... + 198$ των πολλαπλασίων του 9.
Όμως στα πολλαπλάσια του 4 και του 9 περιέχονται και τα πολλαπλάσια του 36 που, με αυτόν τον τρόπο, αφαιρούνται δυο φορές. Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε μια φορά τα πολλαπλάσια του 36 για να βρούμε το πραγματικό άθροισμα. Επομένως

$S = (1 + 2 + 3 + ... + 200)(4 + 8 + 12 + ... + 200) - (9 + 18 + 27 + ... + 198 + + (36 + 72 + ... + 180)$.

Κατά τα γνωστά έχουμε:

$1 + 2 + 3 + ... + 200 = \frac{200}{2}(1 + 200) = 100 \cdot 201 = 20100$

$4 + 8 + 12 + ... + 200 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 25 \cdot 204 = 5100$

$9 + 18 + ... + 198 = \frac{22}{2}(9 + 198) = 11 \cdot 207 = 2277$

$36 + 72 + ... + 180 = \frac{5}{2}(36 + 180) = \frac{5}{2} \cdot 216 = 5 \cdot 108 = 540$

Άρα $S = 20100 - 5100 - 2277 + 540 = \mathbf{13263}$.

6. Το άθροισμα ν όρων της ακολουθίας είναι

$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$ ή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2]$.

Πρέπει $S_\nu > 400 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] > 400$

$\Leftrightarrow \nu^2 > 400$
$\Leftrightarrow \nu > 20$.

7. Για την 1η γραμμή του πίνακα έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (12 - 1)(-10) = 120 - 110 = \mathbf{10}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{12}{2}(120 + 10) = 6 \cdot 130 = \mathbf{780}$.

Για την 2η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $109 = 5 + (27 - 1)\omega$ ή $\boldsymbol{\omega = 4}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{27}{2}(5 + 109) = \frac{27}{2} \cdot 114 = \mathbf{1539}$.

Για την 3η γραμμή έχουμε:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$ ή $210 = \frac{12}{2}[2\alpha_1 + 11 \cdot 3]$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = 1}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $\alpha_\nu = 1 + 11 \cdot 3$ ή $\boldsymbol{\alpha_\nu = 34}$.

Για την 4η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $-8 = \alpha_1 + 15 \cdot 2$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -38}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ ή $S_\nu = \frac{16}{2}(-38 - 8) = 8 \cdot (-46) = \mathbf{-368}$.

8. Τις πρώτες 12 ώρες το πλήθος των κτύπων είναι

$1 + 2 + 3 + ... + 12 = \frac{12}{2}(1 + 12) = 6 \cdot 13 = 78$, άρα συνολικά ακούγονται $2 \cdot 78 = 156$ κτυπήματα.

9. Το πλήθος των θέσεων κάθε σειράς καθισμάτων σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 800$ και $\alpha_{33} = 4160$. Επομένως, λόγω της $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, είναι $4160 = 800 + (33 - 1) \cdot \omega$ ή $\omega = 105$. Το στάδιο έχει συνολικά:

$$S_{33} = \frac{33}{2}(800 + 4160) = \frac{33}{2} \cdot 4960 = 33 \cdot 2480 = \mathbf{81840} \text{ θέσεις.}$$

Η μεσαία σειρά, δηλαδή η 17η σειρά έχει

$$\alpha_{17} = 800 + (17 - 1) \cdot 105 = 800 + 16 \cdot 105 = \mathbf{2480} \text{ θέσεις.}$$

10. Οι όροι της ακολουθίας διαδοχικά θα είναι

$$3, x_1, x_2, ..., x_{10}, 80$$

συνολικά 12 όροι.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $80 = 3 + 11\omega$ ή $\omega = 7$, οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73.$$

11. Έχουμε

$$1 + \frac{\nu - 1}{\nu} + \frac{\nu - 2}{\nu} + \frac{\nu - 3}{\nu} + ... + \frac{1}{\nu} = \frac{\nu + (\nu - 1) + (\nu - 2) + ... + 1}{\nu} =$$

$$= \frac{\frac{\nu(\nu + 1)}{2}}{\nu} = \mathbf{\frac{\nu + 1}{2}}.$$

12. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20€.
Το 2ο μέτρο θα κοστίσει 25€.
Το 3ο μέτρο θα κοστίσει 30€. κ.τ.λ.
Αν λοιπόν η γεώτρηση πάει ν μέτρα βάθος, τότε το συνολικό κόστος, σύμφωνα με τον τύπο $S_\nu = \frac{(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega)\nu}{2}$, θα είναι ίσο με:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 20 + (\nu - 1)5].$$

Πρέπει επομένως

$$\frac{\nu}{2}[2 \cdot 20 + (\nu - 1)5] \leq 4.700 \Leftrightarrow 20\nu + 2{,}5\nu(\nu - 1) \leq 4.700$$

$$\Leftrightarrow 8\nu + \nu(\nu - 1) \leq 1880$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 + 7\nu - 1880 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\nu - 40)(\nu + 47) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -47 \leq \nu \leq 40$$

Άρα η γεώτρηση μπορεί να πάει 40m βάθος.

§ 5.3. Γεωμετρική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$, ii) $\alpha_\nu = \frac{2}{3} \cdot 3^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-2}$, iii) $\alpha_\nu = 9 \cdot 3^{\nu-1} = 3^{\nu+1}$,

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$, v) $\alpha_\nu = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{2^{\nu-5}}$,

vi) $\alpha_\nu = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{\nu-1}} = \frac{2}{3^{\nu-3}}$, vii) $\alpha_\nu = 1 \cdot (0{,}4)^{\nu-1} = 0{,}4^{\nu-1}$,

viii) $\alpha_\nu = (-2) \cdot (-2)^{\nu-1} = (-2)^\nu$, ix) $\alpha_\nu = (-3) \cdot (-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$.

2. i) $\alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^8 = 64$, ii) $\alpha_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458$, iii) $\alpha_8 = 729 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3}$,

iv) $\alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^9 = -512$, v) $\alpha_9 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^8}{2^8} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$.

3. i) $\frac{32}{3} = \alpha_1 \cdot 2^5$ ή $\alpha_1 = \frac{32}{3 \cdot 2^5} = \frac{1}{3}$,

ii) $\frac{27}{128} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ ή $\frac{3^3}{2^7} = \alpha_1 \cdot \frac{3^3}{2^6}$, άρα $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

4. i) $\begin{cases} 12 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \\ 96 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^5}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{96}{12}$ ή $\lambda^3 = 8$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

ii) $\begin{cases} \frac{8}{3} = \alpha_1 \cdot \lambda \\ \frac{64}{81} = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ή $\lambda^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, άρα $\boldsymbol{\lambda = \frac{2}{3}}$.

5. i) $\begin{cases} 125 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \\ \frac{125}{64} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^9}{\alpha_1\lambda^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, ή $\lambda^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, άρα $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε $125 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{2^3}$ ή $\alpha_1 = 125 \cdot 2^3 = 1000$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{14} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1000}{8192}$.

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

ii) $\begin{cases} \sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12} \\ 32\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{22} \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^{22}}{\alpha_1\lambda^{12}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ή $\lambda^{10} = 2^5$ ή $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Για $\lambda = \sqrt{2}$ έχουμε $\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot 2^6$ ή $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2^6}$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2^6} \cdot 2^{10} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Για $\lambda = -\sqrt{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

6. Έστω α_ν ο όρος που ισούται με 768. Τότε $768 = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ ή $2^{\nu-1} = 256$ ή $2^{\nu-1} = 2^8$, οπότε $\nu - 1 = 8$, άρα $\boldsymbol{\nu = 9}$.

7. i) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 4 \cdot 2^{\nu-1}$.
Αν $4 \cdot 2^{\nu-1} > 2000$, τότε $2^{\nu+1} > 2000$. Έχουμε $2^{10} = 1024$ και $2^{11} = 2048$.
Άρα πρέπει $\nu + 1 > 10$ ή $\nu > 9$.
Επομένως ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 2000 είναι ο 10ος όρος.

ii) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha\nu = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$.

Αν $128 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} < 0{,}25$, τότε $2^{\nu-1} > \frac{128}{0{,}25}$ ή $2^{\nu-1} > 512$.
Έχουμε $2^8 = 256$ και $2^9 = 512$.
Άρα πρέπει $\nu - 1 > 9$ ή $\nu > 10$.
Επομένως ο πρώτος όρος που είναι μικρότερος του 512 είναι ο 11ος.

8. i) $\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$.

ii) Ισχύει
$(x + 1)^2 = (x - 4)(x - 19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 23x + 76$
$\Leftrightarrow 25x = 75$
$\Leftrightarrow \mathbf{x = 3}$.

9. i) $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \mathbf{1023}$.

ii) $S_{10} = 3 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \dfrac{59048}{2} = 3 \cdot 29524 = \mathbf{88572}$.

iii) $S_{10} = -4 \cdot \dfrac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = -4 \cdot \dfrac{1023}{-3} = 4 \cdot 341 = \mathbf{1364}$.

10. i) Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $8192 = 2 \cdot 4^{\nu - 1}$ ή $4^{\nu - 1} = 4096 = 4^6$, άρα $\nu - 1 = 6$ ή $\nu = 7$.

Επομένως $S_7 = 2 \cdot \dfrac{4^7 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \dfrac{16383}{3} = 2 \cdot 5461 = \mathbf{10922}$.

ii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $\dfrac{1}{512} = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu - 1}$ ή

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu - 1} = \dfrac{1}{2048} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$, άρα $\nu - 1 = 11$ ή $\nu = 12$.

Επομένως

$$S_{12} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{1}{2}} 4 \cdot \frac{\frac{4095}{4096}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4095}{4096} = \frac{4095}{512} \approx 8.$$

iii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $256 = 1 \cdot (-2)^{\nu - 1}$ ή $(-2)^8 = (-2)^{\nu - 1}$, άρα $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Επομένως

$$S_9 = 1 \cdot \frac{(-2)^9 - 1}{-2 - 1} = \frac{-513}{-3} = \mathbf{171}.$$

11. Έχουμε $\alpha_1 = 3$ και,

σε 1 ώρα $\alpha_2 = 3 \cdot 2$

σε 2 ώρες $\alpha_3 = 3 \cdot 2^2$

σε 3 ώρες $\alpha_4 = 3 \cdot 2^3$ κτλ. και,

σε 12 ώρες $\alpha_{13} = 3 \cdot 2^{12} = \mathbf{12288}$ βακτηρίδια.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 60$ και,

μετά την 1η αναπήδηση $\alpha_2 = 60 \cdot \dfrac{1}{3}$

μετά την 2η αναπήδηση $\alpha_3 = 60 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

μετά την 3η αναπήδηση $\alpha_4 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

μετά την 4η αναπήδηση $\alpha_5 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{81} = \frac{20}{27} \approx 0{,}74\text{m}.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\frac{2^\nu}{3^{\nu+1}}} = \frac{2^{\nu+1} \cdot 3^{\nu+1}}{2^\nu \cdot 3^{\nu+2}} = \frac{2}{3}$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \frac{2}{3}$.

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \mathbf{\frac{2}{3}}$ και $\alpha_1 = \mathbf{\frac{2}{9}}$.

2. Πρέπει

$$\left(\sqrt[4]{10\nu+4}\right)^2 = \sqrt{\nu-5} \cdot \sqrt{\nu+2} \Leftrightarrow \sqrt{10\nu+4} = \sqrt{(\nu-5)(\nu+2)}$$
$$\Leftrightarrow (\nu-5)(\nu+2) = 10\nu+4$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 - 13\nu - 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{13 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{13 \pm 15}{2} = \begin{cases} 14 \\ -1 \end{cases}$$

Με δοκιμή βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή **ν = 14** είναι δεκτή.

3. i) Έστω μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ. Τότε οι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1,\quad \alpha_1\lambda,\quad \alpha_1\lambda^2,\quad \alpha_1\lambda^3,\quad \ldots,\quad \alpha_1\lambda^\nu,\quad \ldots$$

και τα τετράγωνα των όρων αυτών είναι:

$$\alpha_1^2,\quad \alpha_1^2\lambda^2,\quad \alpha_1^2\lambda^4,\quad \alpha_1^2\lambda^6,\quad \ldots\quad \alpha_1^2\lambda^{2\nu}.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^2 και λόγο λ^2.

ii) Αν υψώσουμε τους όρους της προόδου στην k έχουμε:

$$\alpha_1^k,\quad \alpha_1^k\lambda^k,\quad \alpha_1^k\lambda^{2k},\quad \alpha_1^k\lambda^{3k},\quad \ldots\quad \alpha_1^k\lambda^{\nu k}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^k και λόγο λ^k.

4. i) Έχουμε $\alpha_1 + \alpha_1\lambda = 3 + \sqrt{3}$ (1) και $\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 4(3 + \sqrt{3})$ (2).

Οι (1) και (2) σχηματίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda + 1) = 3 + \sqrt{3} \\ \alpha_1(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) = 4(3 + \sqrt{3}). \end{cases}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος προκύπτει

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 1) - 3(\lambda + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = \sqrt{3} \text{ ή } \lambda = -\sqrt{3}.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές του λ στην (1) και έχουμε

Για $\lambda = -1$, $\alpha_1 \cdot 0 = 3 + \sqrt{3}$ (αδύνατο)

Για $\lambda = \sqrt{3}$, $\alpha_1(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$ ή $\alpha_1 = \sqrt{3}$

Για $\lambda = -\sqrt{3}$, $\alpha_1(1 - \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -(3 + 2\sqrt{3})}$.

5. Έχουμε $\alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^5 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda(\lambda^4 + 1) = 34$ (1)

και $\alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^6 = 68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2(\lambda^4 + 1) = 68$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $\lambda = 2$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha_1 = 1$.

Άρα $$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1024 - 1 = \mathbf{1023}.$$

6. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια από σήμερα, τότε τον επόμενο χρόνο, δηλαδή ύστερα από ν + 1 χρόνια από σήμερα, θα είναι (σε εκατομμύρια).

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{2}{100} \cdot \alpha_\nu = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu}.$$

Επειδή $\alpha_1 = 90 \cdot 1{,}02$ και $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $\alpha_1 = 90 \cdot 1{,}02$ και λόγο $\lambda = 1{,}02$, επομένως

$$\alpha_\nu = 90 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02^{\nu-1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_\nu = 90 \cdot 1{,}02^\nu}.$$

Ύστερα από 10 χρόνια ο πλυθυσμός της χώρας θα είναι

$$\alpha_{10} = 90 \cdot 1{,}02^{10} \approx 90 \cdot 1{,}22 \text{ ή } 109800000 \text{ κάτοικοι.}$$

7. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός αφού διέλθει μέσα από ν φίλτρα, τότε η έντασή του αφού διέλθει και μέσα από το επόμενο φίλτρο, δηλαδή αφού διέλθει συνολικά μέσα από ν + 1 φίλτρα θα είναι

$$I_{\nu+1} = I_\nu - \frac{10}{100} I_\nu = 0{,}9 I_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu.$$

Επειδή $I_1 = I_0 \cdot 0{,}9$ και $I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $I_0 \cdot 0{,}9$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$ ή

$$\mathbf{I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9^\nu}.$$

Για $\nu = 10$ έχουμε $I_{10} = I_0 \cdot 0{,}9^{10} \approx 0{,}35 \cdot I_0$.

8. i) Οι 11 ενδιάμεσοι τόνοι με τους δύο ακραίους C΄ και **C΄΄** θα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 261$ και $\alpha_{13} = 522$.

Επειδή $\alpha_{13} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12}$ έχουμε $522 = 261 \cdot \lambda^{12}$ και επομένως $\boldsymbol{\lambda = \sqrt[12]{2}}$.

ii) Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 261 \cdot \sqrt[12]{\mathbf{2^5}}$.

9. i) Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμόσουμε τη διαδικασία ν φορές, τότε η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία μια ακόμα φορά, δηλαδή ν + 1 συνολικά φορές θα είναι

$$D_{\nu+1} = D_\nu - \frac{D_\nu}{40} \cdot 4 = D_\nu - 0{,}1 \cdot D_\nu = (1 - 0{,}1)D_\nu = 0{,}9D_\nu.$$

Επομένως $D_{\nu+1} = 0{,}9D_\nu$ και $D_1 = 36$ όσο το νερό που μένει την 1η φορά. Βλέπουμε ότι η ακολουθία D_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με $D_1 = 36$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $D_\nu = 36 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$.

ii) $D_7 = 36 \cdot 0{,}9^6 \approx 19{,}13$, οπότε η ποσότητα του αντιπυκτικού είναι περίπου $40 - 19{,}13 = \mathbf{20{,}87\ell}$.

10. Αφού διπλασιάζουμε κάθε φορά τον ρυθμό των κόκκων του ρυζιού έχουμε $\alpha_{\nu+1} = 2 \cdot \alpha_\nu$.

Επειδή στο 1ο τετραγωνάκι βάζουμε 1 κόκκο ρύζι έχουμε $\alpha_1 = 1$.

Επομένως η ακολουθία αν, είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$, άρα

$$\alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu = 2^{\nu-1}.$$

Συνολικά σε όλα τα τετραγωνάκια πρέπει να μπουν

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \text{ κόκκοι ρύζι.}$$

Το ρύζι αυτό είναι περίπου σε κιλά

$$\frac{2^{64} - 1}{20000} \cong \frac{1{,}8447 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^4} = 0{,}9223 \cdot 10^{15} = 9{,}223 \cdot 10^{14} \text{ κιλα} = 9{,}223 \cdot 10^{11} \text{ τόνοι.}$$

11. i) Έχουμε $S_1 = 3$

$S_2 = 3 \cdot 4 = 12$

$S_3 = 12 \cdot 4 = 48$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος προκύπτει από το πλήθος των πλευρών του προηγούμενου σχήματος με πολλαπλασιασμό επί 4. Επομένως $S_{\nu+1} = 4 \cdot S_\nu$, οπότε

$S_1 = 3$ Πολλαπλασιάζουμε
$S_2 = 4S_1$ τις ισότητες αυτές κατά μέλη
$S_3 = 4S_2$ και έχουμε
..... $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu - 1}$
$S_\nu = 4S_{\nu - 1}$

ii) Έχουμε $U_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$$U_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$U_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$U_{\nu + 1} = U_\nu \cdot \frac{4}{3}.$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu - 1}$.

§ 5.4. Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

1. $\alpha_5 = 5.000(1 + \frac{20}{100})^5 = 5.000 \cdot (1{,}05)^5 = 5.000 \cdot 1{,}27628 = 6381{,}4$€.

2. $\alpha_{10} = \alpha(1 + \tau)^{10} \Leftrightarrow 50.000 = \alpha(1 + \frac{3}{100})^{10}$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}03^{10} = 50.000$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}34391 = 50.000$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{50}{1{,}34391} = 37.204{,}87€.$$

3. $\alpha_5 = (1 + \tau)^5 \Leftrightarrow 12.762 = 10.000(1 + \tau)^5$

$$\Leftrightarrow (1 + \tau)^5 = \frac{12.762}{10.000}$$
$$\Leftrightarrow (1 + \tau)^5 = 1{,}2762$$
$$\Leftrightarrow 1 + \tau = 1{,}05$$
$$\Leftrightarrow \tau = 0{,}05 = 5\%.$$

4. $\sum = 5.000(1 + \frac{3}{100}) \cdot \frac{(1 + (3 / 100))^5 - 1}{3 / 100}$

$$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{3 / 100}$$
$$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{0{,}159274}{0{,}03} \approx 27.342{,}05€.$$

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος T σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{\varepsilon}{100}$.

   Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του T. Για παράδειγμα, αν $\varepsilon = 3$, τότε $T = 150$, ενώ αν $\varepsilon = 5$, τότε $T = 250$ κτλ.

2. Το διάστημα S σε *km* που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα $2h$, με μέση ταχύτητα υ σε *km/h*, δίνεται από τον τύπο $S = 2\upsilon$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν $\upsilon = 60$, τότε $S = 120$, ενώ αν $\upsilon = 70$, τότε $S = 140$, κτλ.

3. Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του E. Για παράδειγμα αν $\rho = 1$, τότε $E = \pi$, ενώ αν $\rho = 2$, τότε $E = 4\pi$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.

✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της *f*.

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα *f, g, h* κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση *f* από το Α στο Β, το $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται στο $y \in \mathrm{B}$, τότε γράφουμε:

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

και διαβάζουμε «*y* ίσον *f* του *x*». Το $\boldsymbol{f(x)}$ λέγεται τότε **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα ***x***, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της *f*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x*, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{f(\mathrm{A})}$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$
$$x \to f(x)$$

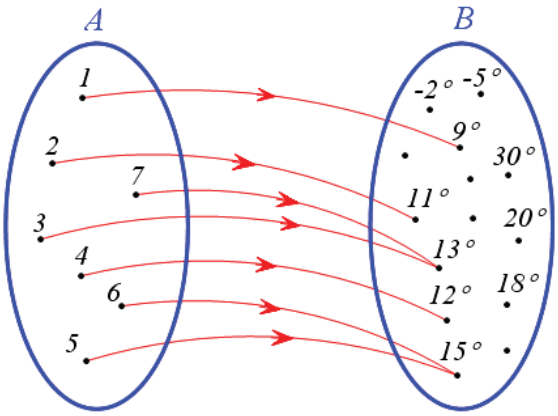
Έτσι π.χ. η συνάρτηση *f*, με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω *f* η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

$$f(A) = \{9^0, 11^0, 12^0, 13^0, 15^0\} \subseteq B$$

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f : A \to B$.

- Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.
- Μερικά στοιχεία του Β μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18^0).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του Α μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του Β (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

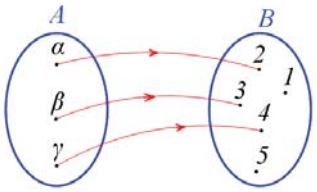
Θεωρούμε τα σύνολα Α={α, β, γ} και Β={1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.

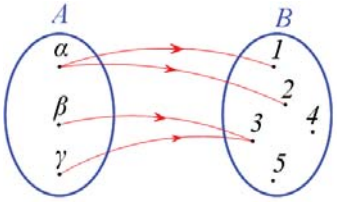
✓ Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.

✓ Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β.

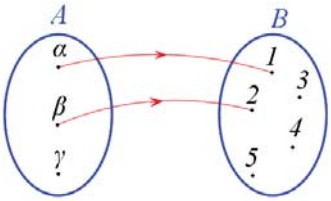
✓ Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β και δεύτερον διότι το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.



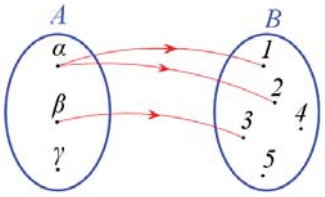
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση *f*, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της Α
- Το σύνολο Β και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.**

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση *f*, με $f(x)=\sqrt{1-4x}$» ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-4x}$» ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y=\sqrt{1-4x}$».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού Α της *f* είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο Β είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $\mathrm{A}=\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1-4x \geq 0$, ενώ το σύνολο Β είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ x-1, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία $-1, 0$ και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για $x=-1<0$, από τον κλάδο $f(x)=x^2+1$, έχουμε:

$$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2.$$

✓ Για $x=0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(0)=0-1=-1.$$

✓ Τέλος, για $x=1\geq 0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(1)=1-1=0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για τα συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι για παράδειγμα οι

$$f(x)=x^2-4x+7, \qquad g(t)=t^2-4t+7 \quad \text{και} \quad h(s)=s^2-4s+7$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\ )=(\ )^2-4(\ )+7,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$\begin{aligned} f(-2)&=(-2)^2-4(-2)+7 \\ &=4+8+7=19 \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} f(3x)&=(3x)^2-4(3x)+7 \\ &=9x^2-12x+7 \end{aligned}$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση

$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s=\frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το *s(t)*. Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t είναι η τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το *s(t)* η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$$

ΛΥΣΗ

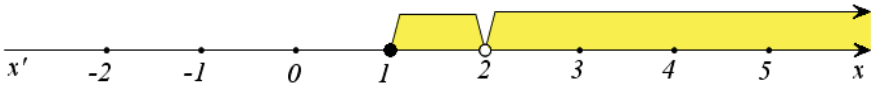
Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

$$x-2\neq 0 \quad \text{και} \quad x-1\geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=[1,2)\cup(2,+\infty)$ (Σχήμα)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{4}{x-1}+5$ **ii)** $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

iii) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **iv)** $f(x)=\frac{1}{|x|+x}$

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

iii) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ **iv)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x<0 \\ 2x+3, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5)$, $f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".

i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x=0$, $x=1$, $x=2$ και $x=3$. Τι παρατηρείτε;

ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$f(x)=36$, $f(x)=49$, $f(x)=100$ και $f(x)=144$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\dfrac{4}{x-1}+5$, **ii)** $g(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x)=7$ **ii)** $g(x)=2$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{5}$.

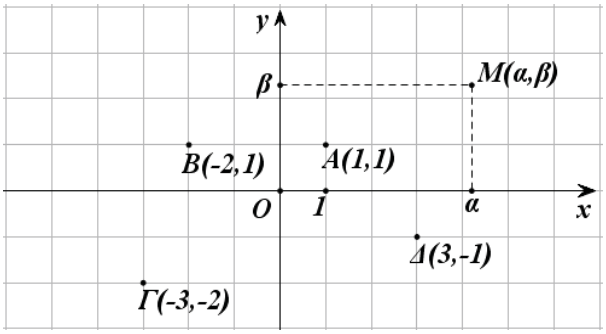
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O. Από αυτούς ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x**, ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι αριθμοί α, β λέγονται **συντεταγμένες** του M. Ειδικότερα ο α λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου M. Το σημείο M που έχει συντεταγμένες α και β συμβολίζεται με $M(\alpha,\beta)$ ή, απλά, με (α,β).

Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy, ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

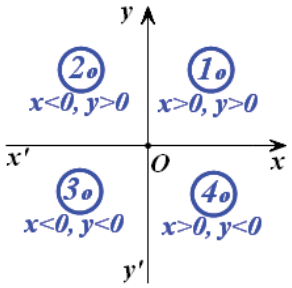
ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύ-

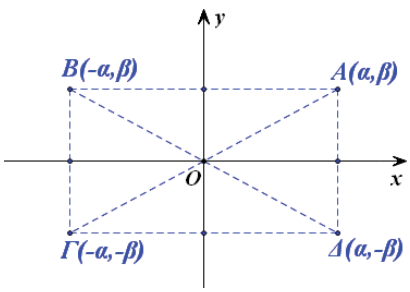
στημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

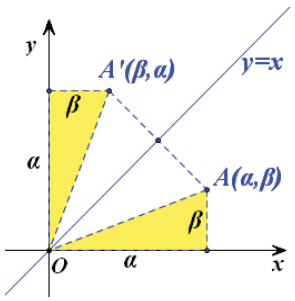
- Τα σημεία του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1ο, 2ο, 3ο και 4ο, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(\alpha,-\beta)$, που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α΄).
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-\alpha,\beta)$, που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α΄).
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $\Gamma(-\alpha,-\beta)$, που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α΄).
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $A'(\beta,\alpha)$ που έχει τετμημένη την τεταγμένη του A και τεταγμένη την τετμημένη του A (Σχ. β΄).



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

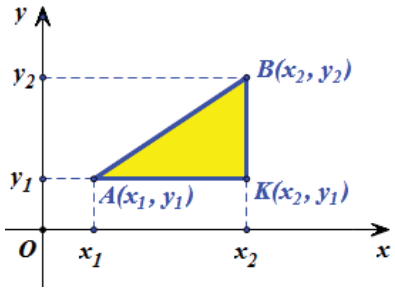
Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι οι απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\overset{\triangle}{A}B$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

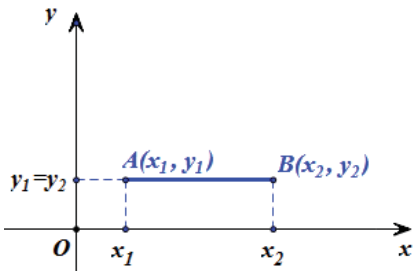


$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (KA)^2 + (KB)^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\end{aligned}$$

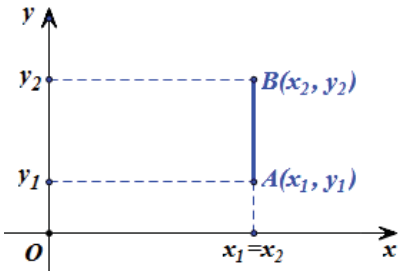
οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η AB είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ (Σχήμα γ΄) ή παράλληλη με τον άξονα $y'y$ (Σχήμα δ΄).



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Για παράδειγμα, αν $A(3,1)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι:

$$(AB) = \sqrt{(3-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

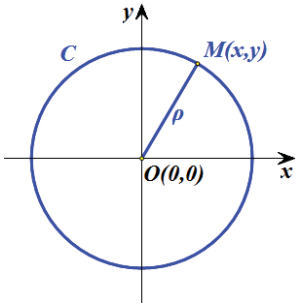
$$(A\Gamma) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\ .$$

Αφού, λοιπόν, είναι $(AB) = (A\Gamma)$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 32 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω *C* ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα *ρ*. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο *C*, αν και μόνο αν ισχύει $x^2+y^2=\rho^2$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει $(OM)=\rho$. Όμως $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(OM)=\rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho \Leftrightarrow x^2+y^2=\rho^2$$

Επομένως το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στο κύκλο $C(\mathrm{O},\rho)$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2+y^2=\rho^2 \qquad (1)$$

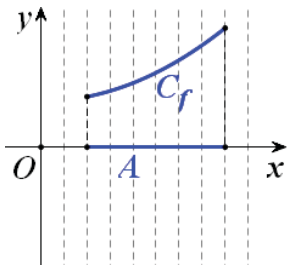
Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και μόνο από αυτές, λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ** .

Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $\rho=1$ είναι η $x^2+y^2=1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και **μοναδιαίος κύκλος**.

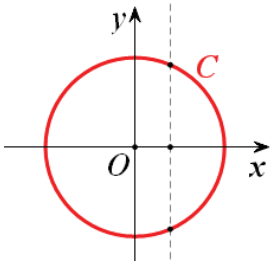
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in \mathrm{A}$, λέγεται **γραφική παράσταση** της *f* και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f*. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της *f* τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y=f(x)$.

Επειδή κάθε $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y\in\mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α΄). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β΄).

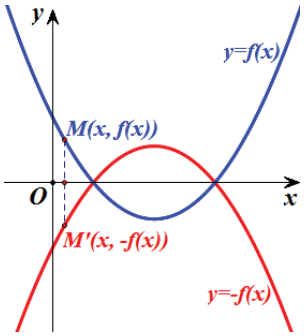


Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ και τούτο διότι η γραφική παράστασης της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία:

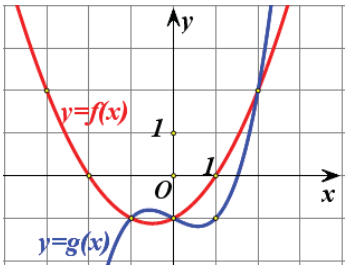
$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1 \text{ και } 2$$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x)=0,\ f(x)=2\ \&\ f(x)=g(x).$$

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x)>0 \text{ και } f(x)>g(x).$$



ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$f(-3)=2,\ f(-2)=0,\ f(-1)=-1,\ f(0)=-1,\ f(1)=0 \text{ και } f(2)=2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-2$ και $x_2=1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-3$ και $x_2=2$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-1$, $x_2=0$ και $x_3=2$.

iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

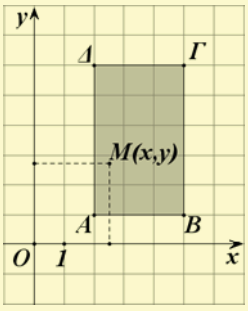
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:
$A(-1,2)$, $B(3,4)$, $O(0,0)$, $\Gamma(3,0)$, $\Delta(0,-5)$ και $E(-2,-3)$.

2. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται μέσα στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1,3)$,

i) ως προς τον άξονα $x'x$

ii) ως προς τον άξονα $y'y$

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή O των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

i) $O(0,0)$ και $A(4,-2)$, **ii)** $A(-1,1)$ και $B(3,4)$,

iii) $A(-3,-1)$ και $B(1,-1)$, **iv)** $A(1,-1)$ και $B(1,4)$.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,-2)$ και $\Gamma(-3,5)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(4,2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:

$$A(2,5),\ B(5,1),\ \Gamma(2,-3),\ \Delta(-1,1)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x)=x^2+k$, $M(2,6)$

ii) $g(x)=kx^3$, $M(-2,8)$

iii) $h(x)=k\sqrt{x+1}$, $M(3,8)$.

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x)=x-4$

ii) $g(x)=(x-2)(x-3)$

iii) $h(x)=(x-1)^2$

iv) $q(x)=x^2+x+1$

v) $\varphi(x)=x\sqrt{x-1}$

vi) $\psi(x)=x\sqrt{x^2-4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$. Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

10. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-5x+4$ και $g(x)=2x-6$. Να βρείτε:

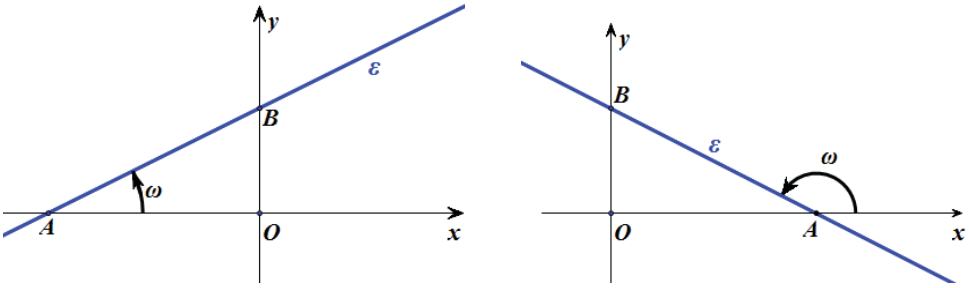
i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ: $f(x) = \alpha x + \beta$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.



Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη *θετική φορά*[1] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα*** $\boldsymbol{x'x}$. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

$$0^\circ \le \omega < 180^\circ .$$

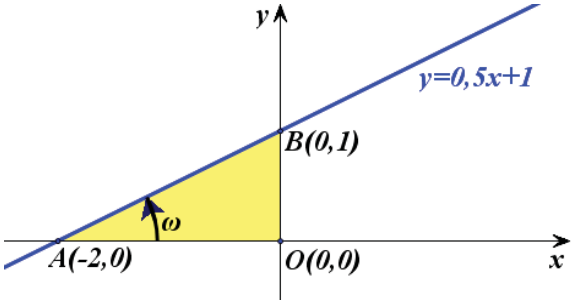
Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με λ_ε ή απλά με λ. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, <u>δεν ορίζουμε</u> συντελεστή διεύθυνσης για την ε.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0,5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y = 0,5x + 1$ (Σχήμα).

---

[1] Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90^0.



Η ευθεία αυτή:

✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α(-2,0), αφού για $y=0$ βρίσκουμε $x=-2$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β(0,1), αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y=1$ και

✓ Έχει κλίση:

$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\frac{(\mathrm{OB})}{(\mathrm{OA})}=\frac{1}{2}=0,5$$

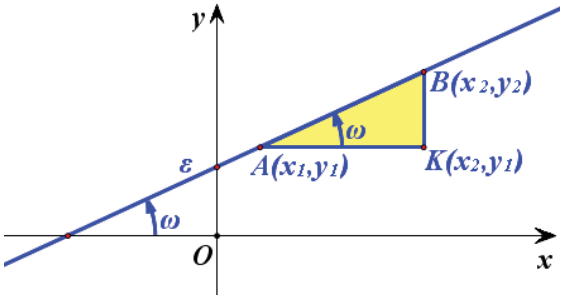
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y=0,5x+1$ είναι ίση με το συντελεστή του x.

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στην Β΄ Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0,β) και έχει κλίση $\lambda=\alpha$. Είναι φανερό ότι:

- αν $\alpha>0$, τότε $0^\circ<\omega<90^\circ$
- αν $\alpha<0$, τότε $90^\circ<\omega<180^\circ$
- αν $\alpha=0$, τότε $\omega=0^\circ$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha=0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x)=\beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση,** διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ της ευθείας $y=\alpha x+\beta$.



Τότε θα ισχύει:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta \quad \text{και} \quad y_2 = \alpha x_2 + \beta ,$$

οπότε θα έχουμε:

$$y_2 - y_1 = (\alpha x_2 + \beta) - (\alpha x_1 + \beta) = \alpha(x_2 - x_1) .$$

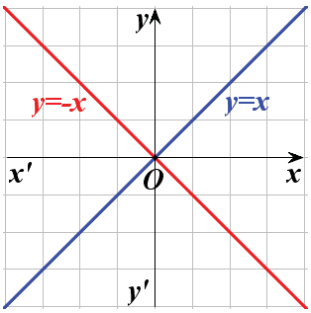
Επομένως θα είναι:

$$\boxed{\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(3,6)$ έχει κλίση $\alpha = \frac{6-3}{3-(-1)} = 0,75$. Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = 0,75$, οπότε θα είναι $\omega \simeq 36,87^\circ$.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x$

Αν $\beta = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = \alpha x$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:



- ✓ Για $\alpha = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = 1$, δηλαδή $\omega = 45^o$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων .
- ✓ Για $\alpha = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = -1$, δηλαδή $\omega = 135^o$. Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y'\hat{O}x$ των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

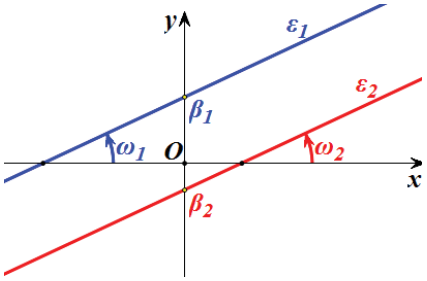
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα :

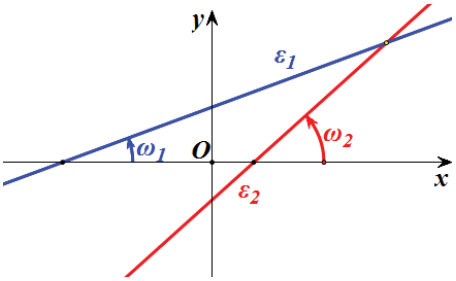
✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α΄), ενώ

✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. (Σχ. β΄)



Σχήμα α΄

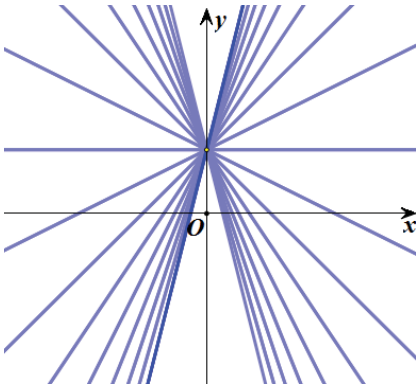


Σχήμα β΄

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

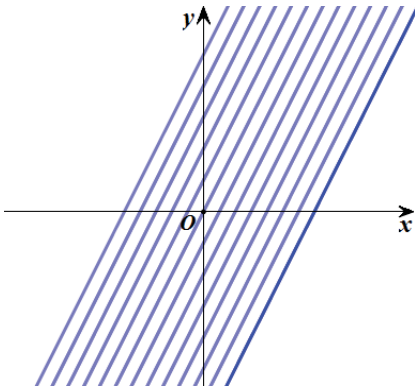
- Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 1$ κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα $y'y$

  Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.



- Οι ευθείες της μορφής $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = 2x$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$ κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση α=2

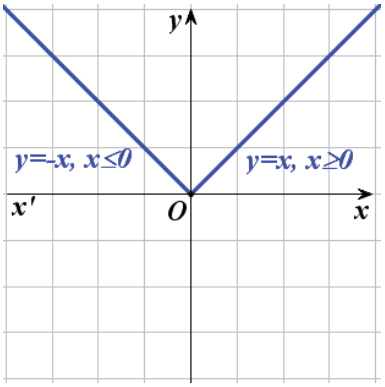
  Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



Η συνάρτηση $f(x)=|x|$

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{αν } x<0\\ x, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$



Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

✓ $y=-x$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x$, με $x\geq 0$

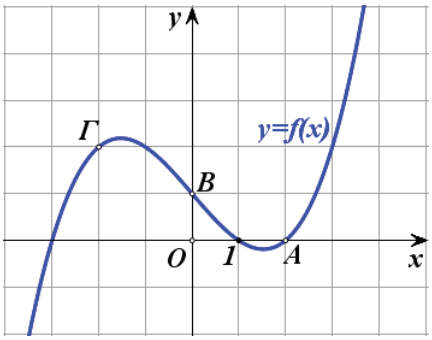
που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία *A* και *B* και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο *Γ*.

ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)>-0,5\cdot x+1$.



ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,1)$ θα ισχύει:

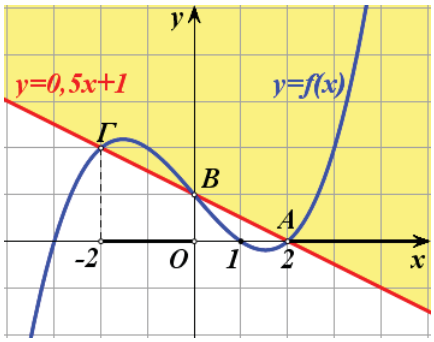
$$0=\alpha\cdot 2+\beta \quad \text{και} \quad 1=\alpha\cdot 0+\beta,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\alpha=-0,5 \quad \text{και} \quad \beta=1$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y=-0,5\cdot x+1.$$



Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ

ανήκει στην ευθεία ΑΒ, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος $(-2,2)$ των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $2=-0,5\cdot(-2)+1$, που ισχύει.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>-0,5\cdot x+1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=-0,5\cdot x+1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία ΑΒ. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία:

i) $y=x+2$ **ii)** $y=\sqrt{3}x-1$

iii) $y=-x+1$ **iv)** $y=-\sqrt{3}x+2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) $A(1,2)$ και $B(2,3)$ **ii)** $A(1,2)$ και $B(2,1)$

iii) $A(2,1)$ και $B(-1,1)$ **iv)** $A(1,3)$ και $B(2,1)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

i) Έχει κλίση $\alpha=-1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{B}(0,2)$.

ii) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=45°$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$.

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y=2x-3$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) $A(1,2)$ και $B(2,3)$ **ii)** $A(1,2)$ και $B(2,1)$

iii) $A(2,1)$ και $B(-1,1)$ **iv)** $A(1,3)$ και $B(2,1)$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

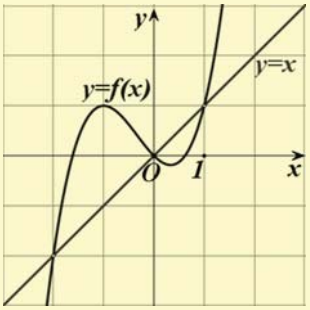
Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0°C ή 32°F και βράζει σε 100°C ή 212°F.

Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ x+1, & \text{αν } 1 \le x \end{cases}$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = x$.



Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:

$f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:

$f(x) < 1$ και $f(x) \ge x$.

8. **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

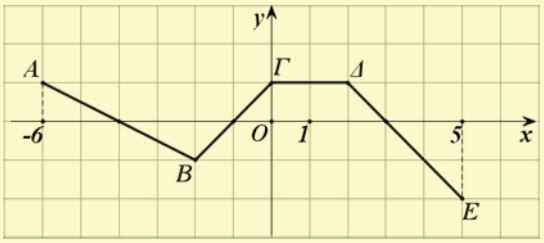
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \le 1 \quad \text{και} \quad |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-6,5]$.



i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f σε κάθε ακέραιο $x \in [-6,5]$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x)=0, \quad f(x)=-1 \quad \text{και} \quad f(x)=1$$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x) \le 0,5 \cdot x .$$

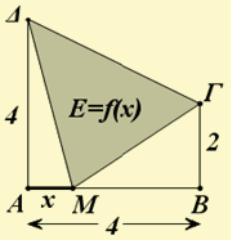
2. Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y=1-x$ και ανακλάται στον άξονα $x'x$. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.

3. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:

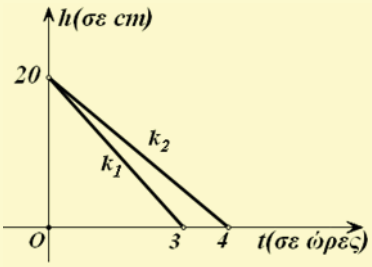
i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:
α) στο βυτιοφόρο και β) στη δεξαμενή.

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AB από το A προς το B. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου $M\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $E=f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους $20cm$ το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου *t*, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου *t,* τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;

6.4 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|+1$. Επειδή

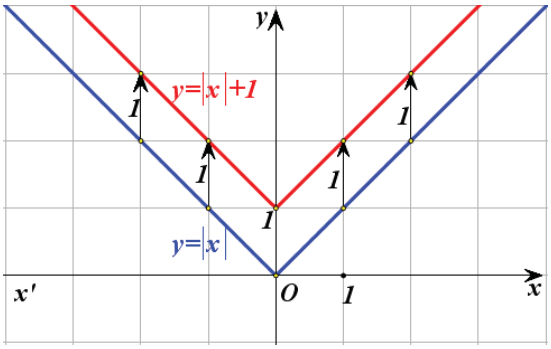
$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν } x<0\\ x+1, & \text{αν } x\geq 0\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|+1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x+1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα $y'y$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα[1] και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|+1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :

$$f(x)=\varphi(x)+1\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\,,$$

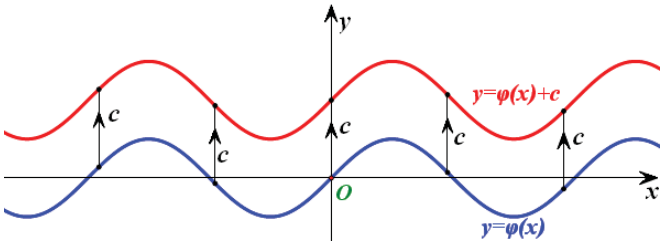
που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

> Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
>
> $$f(x)=\varphi(x)+c,\ \text{ όπου } c>0\,,$$
>
> προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α΄)

---

[1] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα $y'y$.



Σχήμα α΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|-1$. Επειδή

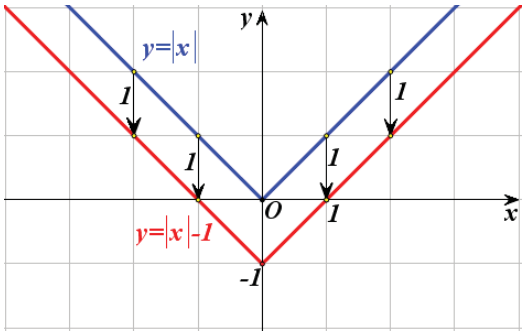
$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν } x<0\\ x-1, & \text{αν } x\geq 0\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα $y'y$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$



από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

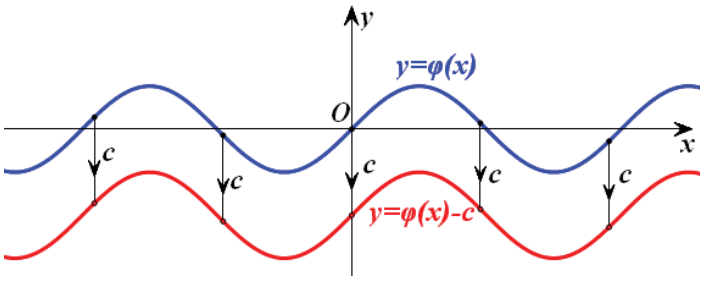
Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :

$$f(x)=\varphi(x)-1\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\,,$$

που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

> Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
>
> $$f(x)=\varphi(x)-c,\ \text{όπου } c>0\,,$$
>
> προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β΄)



Σχήμα β΄

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|$. Επειδή

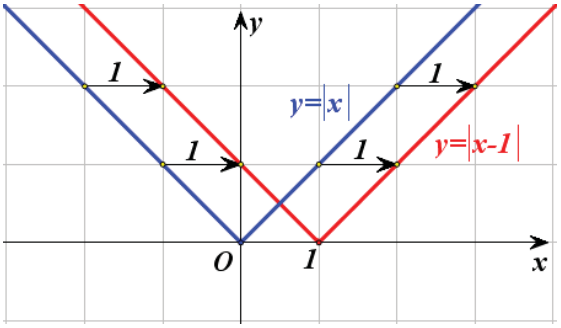
$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν } x<1\\ x-1, & \text{αν } x\geq 1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 1$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 1$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα $x'x$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια[(2)] και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x)=\varphi(x-1)\ , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x-1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση $x-1$.

Γενικά:

---

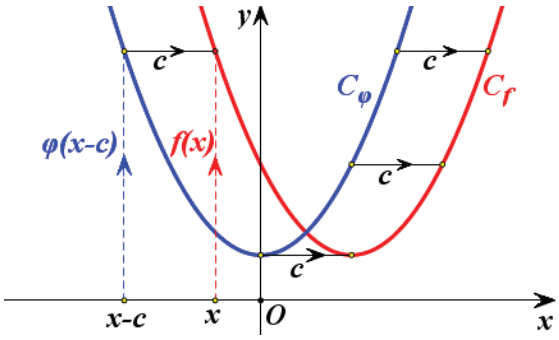
(2) Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f(x)=\varphi(x-c),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ΄).

Πράγματι· επειδή $f(x)=\varphi(x-c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x-c$, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ΄).



Σχήμα γ΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x+1|$. Επειδή

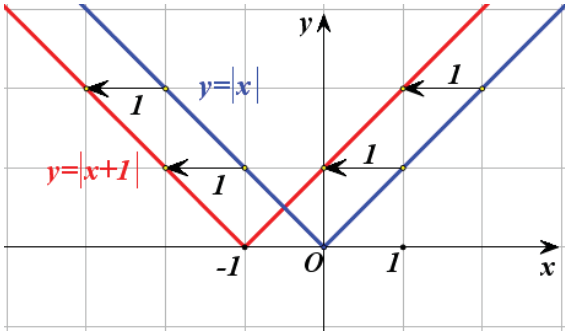
$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν}\ x<-1\\ x+1, & \text{αν}\ x\geq -1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x+1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq -1$ και

✓ $y=x+1$, με $x\geq -1$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα $x'x$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$



από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γρα-

φική παράσταση της $f(x)=|x+1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x)=\varphi(x+1)\ , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\ ,$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x+1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση $x+1$.

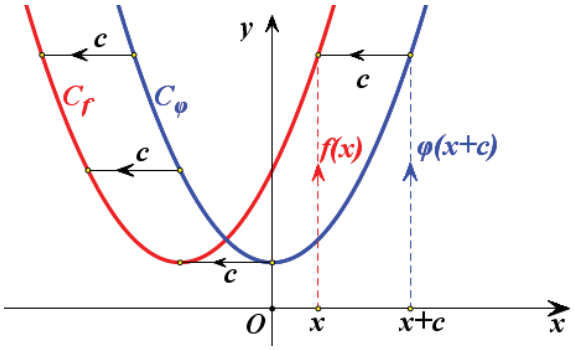
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x+c),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ΄).

Πράγματι· επειδή $f(x)=\varphi(x+c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x+c$, που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ΄).



Σχήμα δ΄

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=|x+3|+2$.

ΛΥΣΗ

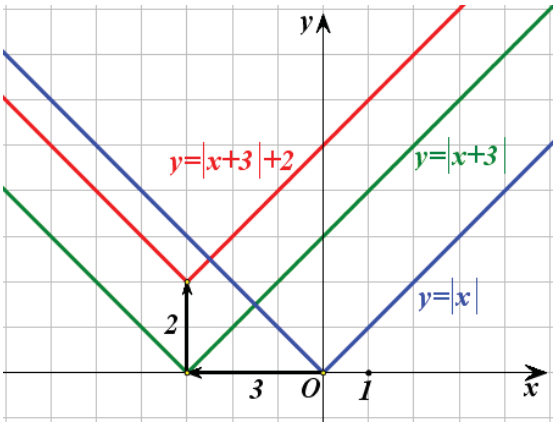
Αρχικά χαράσσουμε την $y=|x+3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y=|x+3|+2$,που όπως είδαμε προκύπτει από μια κα-

τακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=|x+3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως, η γραφική παράσταση της

$$f(x)=|x+3|+2$$

προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).



ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x)=\varphi(x\pm c)\pm d\,, \qquad \text{με } c,d>0$$

Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|\,, \quad f(x)=|x|+2 \quad \text{και} \quad g(x)=|x|-2\,.$$

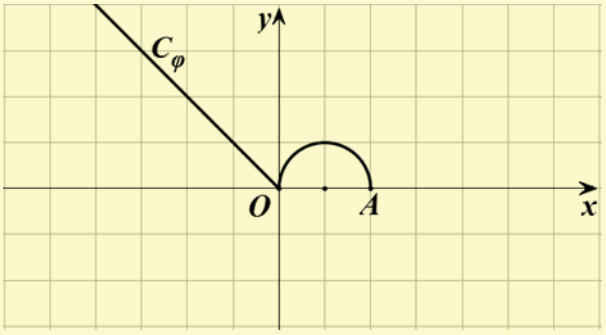
2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|\,, \quad h(x)=|x+2| \quad \text{και} \quad q(x)=|x-2|\,.$$

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|\,, \quad F(x)=|x+2|+1 \quad \text{και} \quad G(x)=|x-2|-1\,.$$

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από την διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,0)$.



Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\varphi(x)+2$ και $g(x)=\varphi(x)-2$

ii) $h(x)=\varphi(x+3)$ και $q(x)=\varphi(x-3)$

iii) $F(x)=\varphi(x+3)+2$ και $G(x)=\varphi(x-3)-2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2-1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

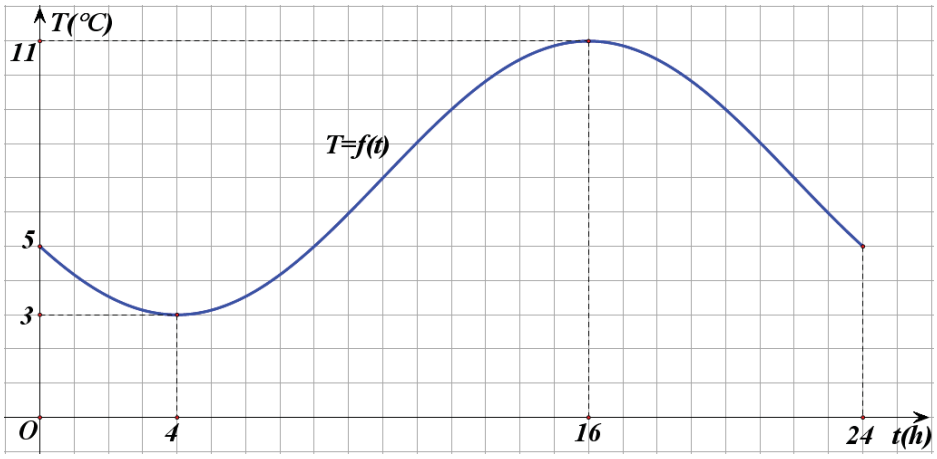
iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδες προς τα πάνω.

iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

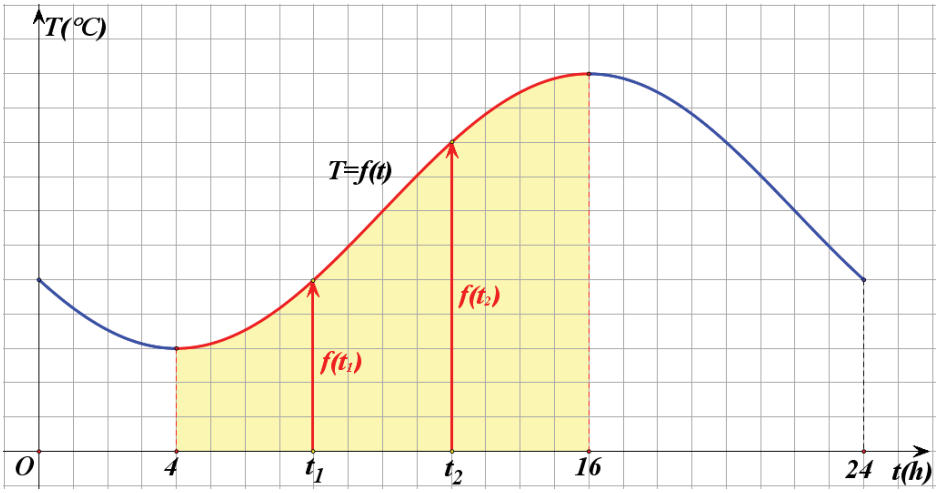
6.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας $(t = 0)$ μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας $(t = 24)$.



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $[4,16]$ η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,16]$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $\boldsymbol{f \nearrow \Delta}$.

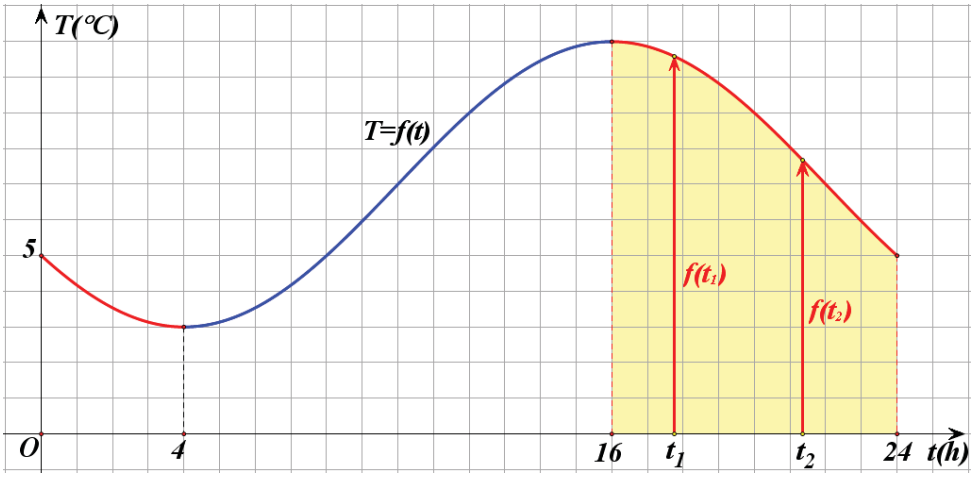
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα $[16,24]$ η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[16,24]$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση *f* λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

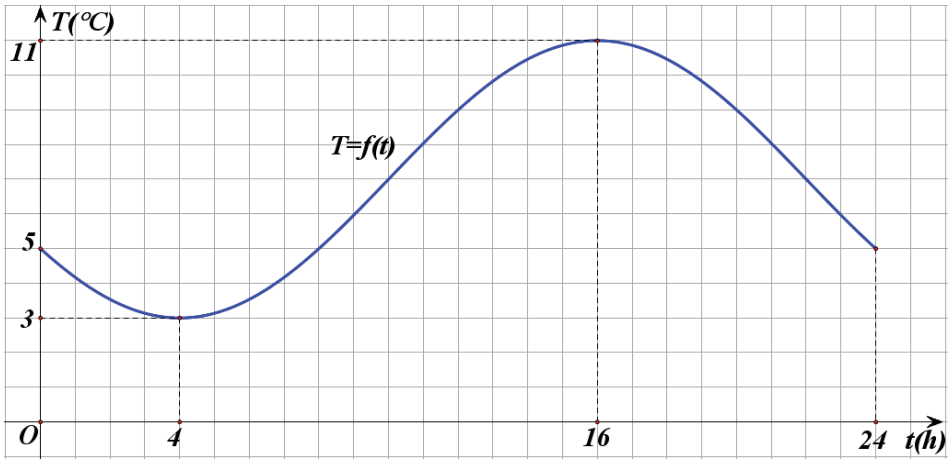
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$.



Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \geq f(4) = 3, \quad \text{για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Το $x_0 \in \mathrm{A}$ λέγεται **θέση ελαχίστου,** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\mathbf{min}\, f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η *f* παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η $T(16) = 11$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \leq f(16) = 11, \quad \text{για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ (ολικό) **μέγιστο** όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου,** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με $\mathbf{max}\, f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$-3x^4 \leq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$-3x^4 + 1 \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

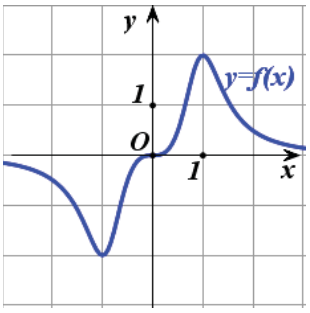
$$f(x) \leq f(0), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

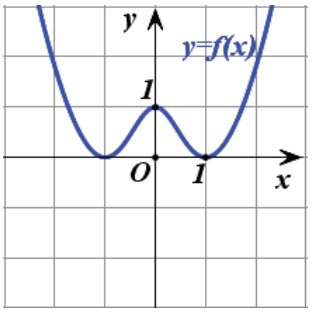
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ:

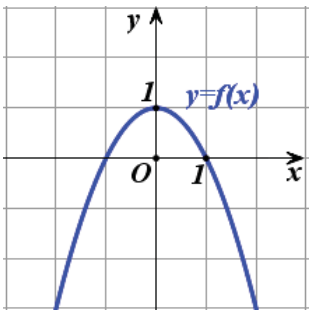
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β΄) ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ΄) ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ΄).



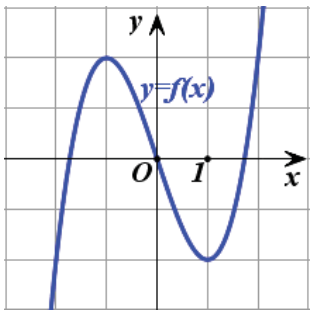
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

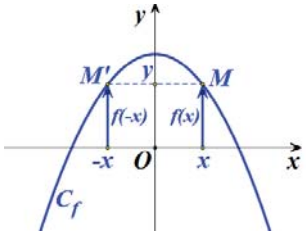


Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Άρτια συνάρτηση



α) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ ανήκει στην C_f.

Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου $M(x,y)$ της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M'(-x,y)$ και επειδή τα σημεία $M(x,y)$ και $M'(-x,y)$ ανήκουν στην C_f, θα ισχύει $y=f(x)$ και $y=f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x)=f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέμε λέγεται **άρτια**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν για κάθε $x\in$ Α ισχύει:

$$-x\in \text{A} \quad \text{και} \quad f(-x)=f(x)$$

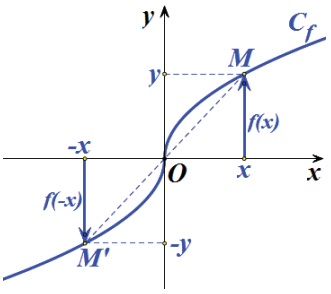
Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^4-x^2+1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=2(-x)^4-(-x)^2+1=2x^4-x^2+1=f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Περιττή συνάρτηση



β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στην C_f.

Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου $M(x,y)$ της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M'(-x,-y)$ και επειδή τα σημεία $M(x,y)$ και $M'(-x,-y)$ ανήκουν στην C_f, θα ισχύει $y=f(x)$ και $-y=f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x)=-f(x)$$

Η συνάρτηση *f* με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή.** Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή,** όταν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει:

$$-x \in \mathrm{A} \quad \text{και} \quad f(-x)=-f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^3-x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x=-f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5$ κτλ., που έχουν περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας <u>άρτιας</u> συνάρτησης *f* που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6,6]$.

Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* και με τη βοήθεια αυτής:

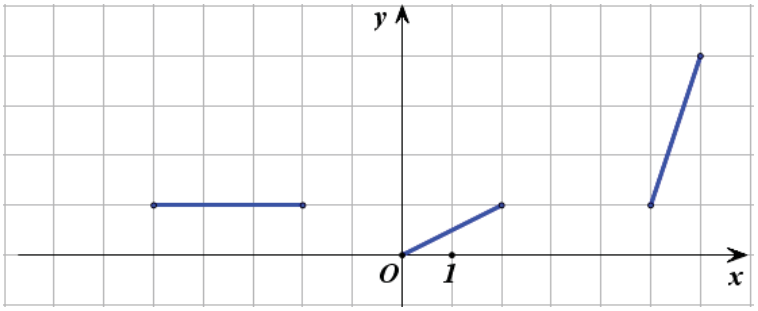
α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f :

i) είναι γνησίως αύξουσα,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα

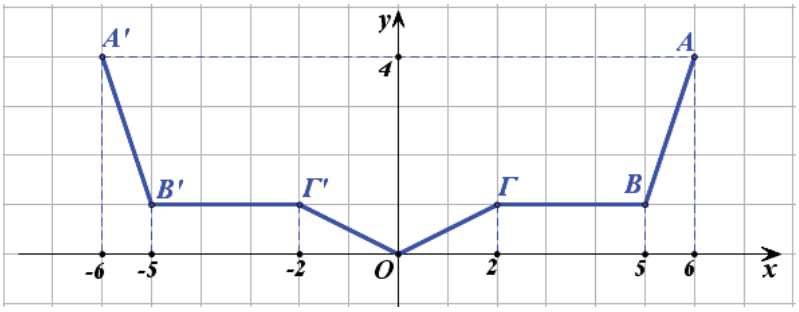
iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της f, θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f, που είναι η πολυγωνική γραμμή Α΄Β΄Γ΄ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f :

i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$ και $[5,6]$,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[-6,-5]$, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων $[0,2]$ και $[5,6]$ αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $[-5,-2]$ και $[2,5]$ τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

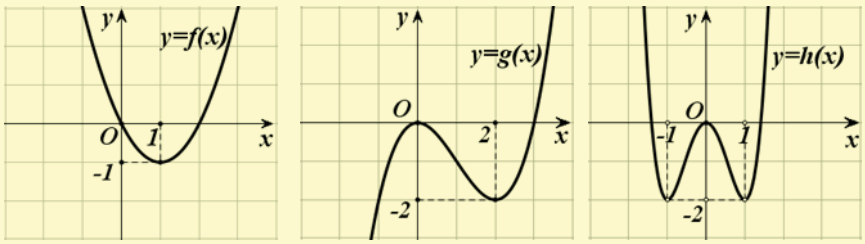
Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:

$$\min f(x) = f(0) = 0\,.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:
α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα.



2) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ **ii)** $f_2(x) = 3|x| + 1$ **iii)** $f_3(x) = |x+1|$

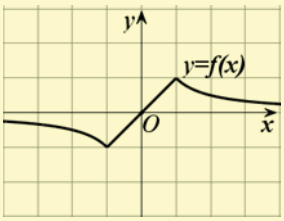
iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ **v)** $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ **vi)** $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

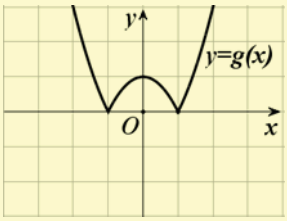
5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

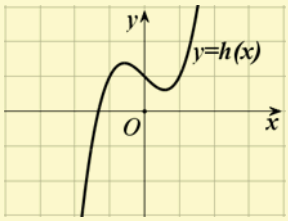
i) $f_1(x)=\dfrac{1}{|x|}$ **ii)** $f_2(x)=\sqrt{x-2}$ **iii)** $f_3(x)=|x-1|-|x+1|$

iv) $f_4(x)=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1}$ **v)** $f_5(x)=\sqrt{|x|}$ **vi)** $f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$.

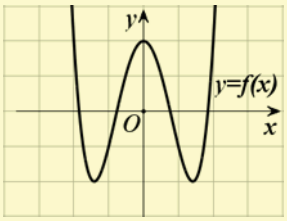
6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

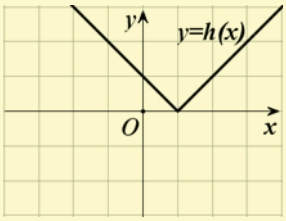






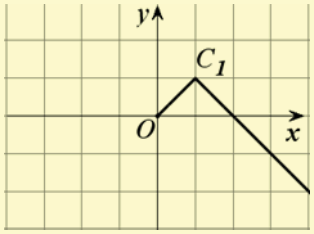
7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές

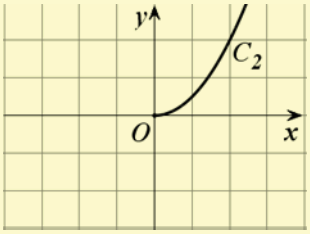


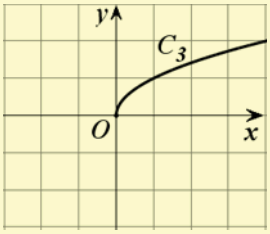


8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και β) Περιττής συνάρτησης.







ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(1,3)$. Α Ψ

2. Οι ευθείες $y=\alpha^2x-2$ και $y=-x+1$ τέμνονται. Α Ψ

3. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα. Α Ψ

4. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα. Α Ψ

5. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(3,3)$. Α Ψ

6. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0)<0$. Α Ψ

7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,5)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Α Ψ

8. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. Α Ψ

9. Η συνάρτηση $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2$ είναι άρτια. Α Ψ

10. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό $-\rho$. Α Ψ

11. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Α Ψ

12. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η $-f$ είναι περιττή. Α Ψ

II) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση *f*.

Η συνάρτηση *f*, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x)=3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x)=3(x-1)^4+2$ Β) $f(x)=3(x-1)^4-2$,

Γ) $f(x)=3(x+1)^4+2$ Δ) $f(x)=3(x+1)^4-2$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ιδέα της χρησιμοποίησης διατεταγμένων ζευγών για τα σημεία ενός επιπέδου και της περιγραφής καμπύλων με εξισώσεις, ανήκει στον Rene Descartes (1596-1650) και στον Pierre de Fermat (1601-1665).

Ο Descartes (Καρτέσιος) γεννήθηκε στη La Haye (σημερινή Ντερκατ) της Touraine και πέθανε στη Στοκχόλμη. Σε ηλικία 10 χρόνων εγγράφηκε στο Βασιλικό Κολλέγιο της La Fleche, όπου δίδασκαν Ιησουίτες. Από εκείνη τη στιγμή αρχίζει και το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Στη ζωή του υπήρξε φιλόσοφος, αλλά ένα μεγάλο μέρος του χρόνου του το διέθετε για τα μαθηματικά.

Τα αποτελέσματα και οι μέθοδοί του, που δημοσίευσε το 1637 στο βιβλίο του Le Geometrie, δημιούργησαν ένα νέο κλάδο των μαθηματικών που αργότερα ονομάστηκε Αναλυτική Γεωμετρία.

Ο Καρτέσιος διείδε τη δύναμη της Άλγεβρας για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων και η σκέψη του αντιπροσώπευε μια ριζική απόκλιση από την μέχρι τότε επικρατούσα άποψη για τη Γεωμετρία. Ο όρος «Καρτεσιανές συντεταγμένες», οφείλεται στο όνομά του.

Ο Fermat, που έζησε στην Toulouse της νότιας Γαλλίας, αν και ήταν νομικός στο επάγγελμα, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.

Τις ιδέες του για συντεταγμένες στη Γεωμετρία, τυποποίησε στις αρχές του 1629 και τις κυκλοφόρησε με αλληλογραφία, αλλά δεν δημοσιεύτηκαν πριν από το 1679. Ο Fermat συνέδεσε το όνομά του με τον ισχυρισμό:

«Για κάθε $\nu > 2$ *είναι αδύνατο να βρούμε θετικούς ακέραιους α, β, γ που να ικανοποιούν την σχέση* $a^{\nu} = \beta^{\nu} + \gamma^{\nu}$ *»*

που είναι γνωστός ως το «τελευταίο θεώρημα του Fermat». Τον ισχυρισμό του αυτόν έγραψε ο Fermat στο περιθώριο ενός βιβλίου του προσθέτοντας και τα εξής:

«Έχω βρει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να χωρέσει».

Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον Άγγλο μαθηματικό A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 6.1. Η έννοια της συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Πρέπει $x - 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Πρέπει $x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 4$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το:
$\mathbb{R} - \{0,4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, -\infty)$.

iii) Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

iv) Πρέπει $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(0, +\infty)$.

2. i) Πρέπει: $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 2]$.

ii) Πρέπει $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$
αφού οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4$ είναι οι αριθμοί -2 και 2.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

iii) Ομοίως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 3]$ αφού οι ρίζες του τριωνύμου και οι αριθμοί 1 και 3.

iv) Πρέπει $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $x \neq 1$.
Άρα, το πειδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο
$[0, +\infty) - \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Είναι
$f(-5) = (-5)^3 = -125$.
$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
$f(6) = 2 \cdot 6 + 3 = 15$.

4. i) Έστω x ο ζητούμενος φυσικός αριθμός. Τότε, ο τύπος της συνάρτησης θα προκύψει ως εξής:

$$x \xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{\cdot 4} (x+1)\cdot 4 \xrightarrow{+x^2} (x+1)\,4 + x^2.$$

Επομένως, θα ειναι $f(x) = (x+1)4 + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

δηλαδή $f(x) = (x+2)^2$, $x \in \mathbb{N}$. (1)

Έτσι θα έχουμε $f(0) = 2^2 = 4$, $f(1) = 3^2 = 9$, $f(2) = 4^2 = 16$ και $f(3) = 5^2 = 25$.

ii) Επειδή $x > 0$, έχουμε:

- ✓ $f(x) = 36 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$.
- ✓ $f(x) = 49 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 5$.
- ✓ $f(x) = 100 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 8$.
- ✓ $f(x) = 144 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 12^2 \Leftrightarrow x = 10$.

5. i) Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + 5 = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\,(x-1) = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

ii) Για $x \neq 0, 4$ έχουμε:

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = 2$$

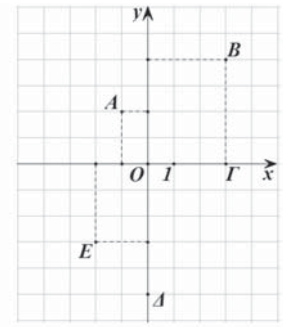
$$\Leftrightarrow x + 4 = 2x \Leftrightarrow x = 4, \text{ αδύνατη.}$$

iii) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

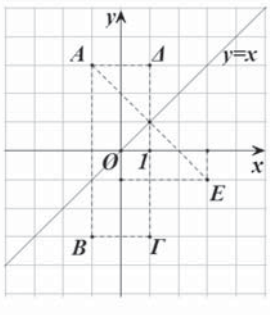
§ 6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα σημεία είναι αποτυπωμένα στο διπλανό σχήμα.



2. Πρέπει $2 < x < 5$ και $1 < y < 6$.

3. Το συμμετρικό του Α(–1, 3),
i) ως προς τον άξονα x΄x είναι το Β(–1, –3)
ii) ως προς τον άξονα y΄y είναι το Δ(1, 3)
iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι το Ε(3, –1)
iv) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το Γ(1, –3).



4. Με βάση τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ της απόστασης των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουμε

i) $(OA) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

ii) $(AB) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

iii) $(AB) = \sqrt{(1+3)^2 + 0^2} = 4$.

iv) $(AB) = \sqrt{0^2 + (4+1)^2} = 5$.

5. i) Είναι

$(AB) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$(A\Gamma) = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$(B\Gamma) = \sqrt{(-3-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2 +} = 7\sqrt{2}$.

Άρα, (ΑΒ) = (ΑΓ), οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

ii) Είναι

$(AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$, οπότε $(AB)^2 = 8$.

$(A\Gamma) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$, οπότε $(A\Gamma)^2 = 18$.

$(B\Gamma) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$, οπότε $(B\Gamma)^2 = 26$.

Παρατηρούμε ότι $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την Α.

6. Είναι

$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5$.

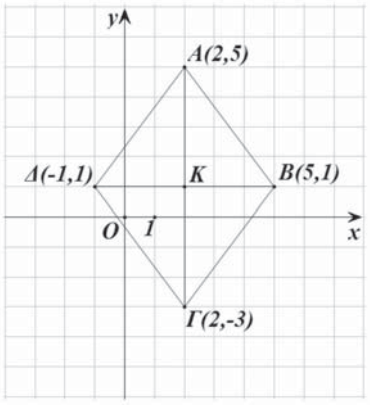
$(ΒΓ) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = 5.$

$(ΓΔ) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = 5.$

$(ΔΑ) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = 5.$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Σχόλιο: Άμεσα προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.



7. Πρέπει

i) $f(2) = 6 \Leftrightarrow 2^2 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$

ii) $g(-2) = 8 \Leftrightarrow k(-2)^3 = 8 \Leftrightarrow k = -1.$

iii) $h(3) = 8 \Leftrightarrow k\sqrt{4} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$

8. i) Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

- Για $y = 0$ έχουμε $x = 4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(4, 0)$.
- Για $x = 0$ έχουμε $y = -4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.

Ομοίως

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και τέμνει

- τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A_1(2, 0)$ και $A_2(3, 0)$ και
- τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, 6)$.

iii) Η h έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- έχει με τον άξονα $x'x$ κοινό σημείο το $A(1, 0)$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο το $B(0, 1)$.

iv) Η q έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

v) Η φ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[1, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1, 0)$ και
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

vi) Η ψ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία, τα $A_1(-2, 0)$ και $A_2(2, 0)$.
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

9. i) Για x = 0 έχουμε f(0) = –1. Άρα η C_f τέμνει τον y΄y στο σημείο A(0, –1).
Για y = 0 έχουμε $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή x = 1.
Άρα η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία $B_1(-1, 0)$ και $B_2(1, 0)$.
ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

10. i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Άρα x = 5 ή x = 2.
Για x = 2, g(2) = 4 – 6 = –2.
Για x = 5, g(5) = 4.
Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα A(2, –2) και B(5, 4).
ii) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

§ 6.3. Η συνάρτηση f(x) = αx + β
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Όπως είναι γνωστό, για το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας y = αx + β ισχύει: α = εφω, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η y = αx + β με τον άξονα x΄x. Επομένως, θα έχουμε
i) εφω = 1, οπότε ω = 45°.
ii) εφω = $\sqrt{3}$, οπότε ω = 60°.
iii) εφω = –1, οπότε ω = 135°.
iv) εφω = $-\sqrt{3}$, οπότε ω = 120°.

2. Αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$, έχουμε:

i) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1.$

ii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1.$

iii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{-1 - 2} = 0.$

iv) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2.$

3. Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής y = αx + β.
i) Επειδή α = –1 και β = 2, η εξίσωση της ευθείας είναι: y = –x + 2.
ii) Επειδή α = εφ 45° = 1 και β = 1, η εξίσωση της ευθείας είναι: y = x + 1.

iii) Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την $y = 2x - 3$ θα έχει ίδια κλίση με αυτή, οπότε θα είναι $\alpha = 2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = 2x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 1) θα ισχύει $1 = 2 \cdot 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 1$.

4. Όπως είδαμε στην άσκηση 2, σε όλες τις περιπτώσεις η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$.

i) Επειδή $\alpha = 1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 2) θα ισχύει $2 = 1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 1$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = x + 1$.

ii) Επειδή $\alpha = -1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = -x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 2) θα ισχύει $2 = -1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 3$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -x + 3$.

iii) Επειδή $\alpha = 0$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(2, 1), η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 1$.

iv) Επειδή $\alpha = -2$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = -2x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο A(1, 3) θα ισχύει $3 = -2 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 5$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 5$.

5. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $C = \alpha \cdot F + \beta$ επειδή το νερό παγώνει στους 0°C ή στους 32°F, θα ισχύει $0 = \alpha \cdot 32 + \beta$. (1)
Επειδή, επιπλέον, το νερό βράζει στους 100°C ή στους 212°F, θα ισχύει $100 = \alpha \cdot 212 + \beta$. (2)
Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $100 = \alpha \cdot 180$, οπότε $\alpha = \frac{5}{9}$ και επομένως $\beta = -\frac{5}{9} \cdot 32$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{5}{9} \cdot 32 \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον αριθμό T, τότε θα ισχύει

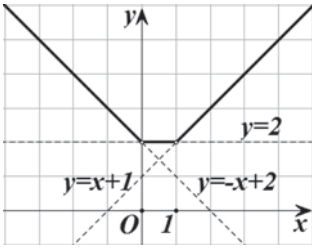
$$T = \frac{5}{9}(T - 32) \Leftrightarrow 9T = 5T - 5 \cdot 32 \Leftrightarrow 4T = -5 \cdot 32 \Leftrightarrow T = -40.$$

Άρα οι −40°F αντιστοιχούν στους −40°C.

6. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται:

✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in (-\infty, 0]$.

✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [0, 1]$ και

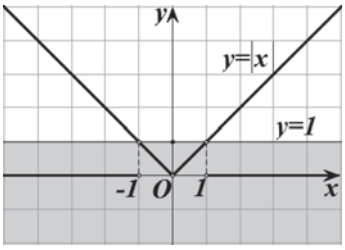


✓ Από το τμήμα της ευθείας y = x + 1 του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [1, +\infty)$.

7. i) Οι ρίζες εξίσωσης f(x) = 1 είναι οι τετμημένες κοινών σημείων της y = f(x) και της ευθείας y = 1, δηλαδή οι αριθμοί –1 και 1.
Οι ρίζες της εξίσωση f(x) = x είναι τετμημένες των κοινών σημείων της y = f(x) και της ευθείας y = x, δηλαδή οι αριθμοί –2, 0 και 1.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης f(x) < 1 είναι οι τετμημένες των σημείων της y = f(x) τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 1, δηλαδή οι αριθμοί $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$.
Οι λύσεις της ανίσωσης f(x) ≥ x είναι οι τετμημένες των σημείων της y = f(x) τα οποία βρίσκονται πάνω από την ευθεία y = x ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα σημεία $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

8. i) Οι γραφικές παραστάσεις των f(x) = |x| και g(x) = 1 δίνονται στο διπλανό σχήμα.



✓ Οι λύσεις της ανίσωσης $|x| \le 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της y = |x| που βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 1 ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα $x \in [-1, 1]$.

✓ Οι λύσεις ανίσωσης |x| > 1 είναι οι τετμημένες των σημείων της y = |x| που βρίσκονται πάνω από την ευθεία y = 1, δηλαδή τα $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

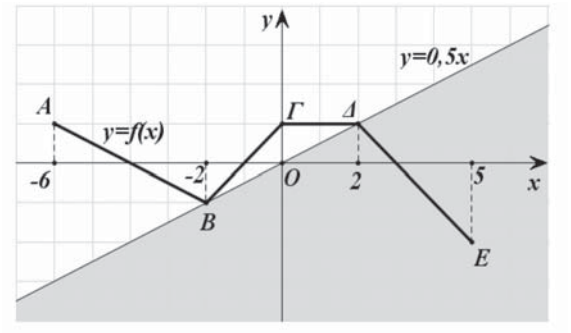
ii) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι για ρ > 0 ισχύει
$|x| \le \rho \Leftrightarrow -\rho \le x \le \rho$.
$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$.
Επομένως
$|x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι
$f(-6) = 1,\ f(-5) = \frac{1}{2},\ f(-4) = 0,\ f(-3) = -\frac{1}{2},\ f(-2) = -1,\ f(-1) = 0.$
$f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 0,\ f(4) = -1,\ f(5) = -2.$

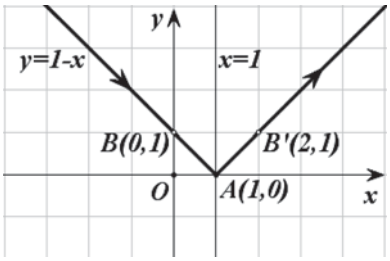
ii) Οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = α είναι οι τετμημένες του σημείου της C_f που έχουν τεταγμένη α. Επομένως
✓ Οι ρίζες της f(x) = 0 είναι οι αριθμοί –4, –1 και 3.
✓ Οι ρίζες της f(x) = –1 είναι οι αριθμοί –2 και 4.
✓ Οι ρίζες της f(x) = 1 είναι ο αριθμός –6 και όλοι οι αριθμοί του κλειστού διαστήματος [0, 2].

iii) Η ευθεία ΒΔ είναι εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Β(–2, –1) και Δ(2, 1) θα ισχύει $-1 = \alpha(-2) + \beta$ και $1 = \alpha \cdot 2 + \beta$.
Οπότε, με πρόσθεση των εξισώσεων αυτών κατά μέλη, βρίσκουμε ότι $\beta = 0$ και επομένως θα έχουμε $\alpha = 0{,}5$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας ΒΔ θα είναι η $y = 0{,}5x$.



Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0{,}5x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 0{,}5x$, ή πάνω σ' αυτή. Είναι δηλαδή όλα τα $x \in [2,5] \cup \{-2\}$.

2. Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο Α(1, 0) και η ανακλωμένη είναι συμμετρική της ημιευθείας ΑΒ (σχ.) ως προς άξονα την ευθεία $x = 1$.
Επομένως, η ανακλώμενη θα είναι η ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β΄(2, 1), όπου Α η αρχή της.

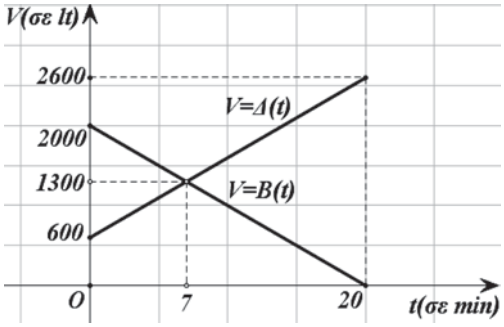


Αν $y = \alpha x + \beta$, $x \geq 1$ είναι η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας, τότε αυτή θα επαλυθεύεται από τα ζεύγη (1, 0) και (2, 1). Δηλαδή θα ισχύουν $0 = \alpha + \beta$ και $1 = 2\alpha + \beta$, από τις οποίες βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -1$. Επομένως η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας είναι: $y = x - 1$, $x \geq 1$.

3. i) α) Αν Β(t) είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στο βυτιοφόρο κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $B(t) = 2000 - 100t$ και επειδή πρέπει $B(t) \geq 0$ θα ισχύει $2000 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 20$.
Επομένως, θα έχουμε $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

β) Αν Δ(t) είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $\Delta(t) = 600 + 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω συνάρτησης είναι τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος. Η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο ποσότητες είναι ίσες είναι η λύση της εξίσωσης B(t) = Δ(t), η οποία γράφεται 2000 – 100t = 600 + 100t ⇔ 200t = 1400 ⇔ t = 7.
Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η t = 7min.



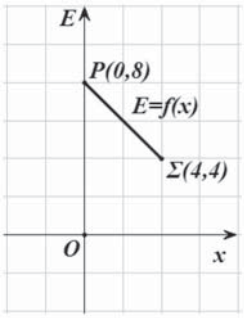
4. Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$ αφαιρούμε από το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων τριγώνων $\overset{\triangle}{\text{ΑΜΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΒΜΓ}}$. Έτσι έχουμε

$$E_{\text{ΜΓΔ}} = E_{\text{ΑΒΓΔ}} - E_{\text{ΑΜΔ}} - E_{\text{ΒΜΓ}}$$
$$= \frac{4+2}{2}\cdot 4 - \frac{x\cdot 4}{2} - \frac{(4-x)\cdot 2}{2}$$
$$= 12 - 2x - (4 - x) = -x + 8.$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = -x + 8, \text{ με } 0 \le x \le 4.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία Ρ(0, 8) και Σ(4, 4).



5. i) Το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση της μορφής h = αt + β και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(3, 0) και Γ(0, 20) θα ισχύει 0 = 3α + β και 20 = β, οπότε θα είναι $\alpha = -\frac{20}{3}$ και β = 20. Επομένως, το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση

$$h = -\frac{20}{3}t + 20\ ,\ 0 \le t \le 3.$$

Άρα η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_1 είναι η

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20,\ 0 \le t \le 3. \qquad (1)$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_2 είναι η

$$h_2(t) = -5t + 20,\ 0 \le t \le 4. \qquad (2)$$

ii) Το κερί k_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί k_1 τη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει $h_2(t) = 2h_1(t)$. Έχουμε λοιπόν:

$$h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\cancel{20}}{4}t + \cancel{20} = 2\left(-\frac{\cancel{20}}{3}t + \cancel{20}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = -\frac{2}{3}t + 2 \Leftrightarrow -3t + 12 = -8t + 24$$

$$\Leftrightarrow 5t = 12 \Leftrightarrow t = 2{,}4.$$

Άρα, το k_2 είχε το διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2{,}4h$.

iii) Αν εργαστούμε όπως στο ερώτημα i) θα βρούμε ότι

$$h_1(t) = -\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon\ ,\ 0 \le t \le 3.$$

$$h_2(t) = -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon\ ,\ 0 \le t \le 4.$$

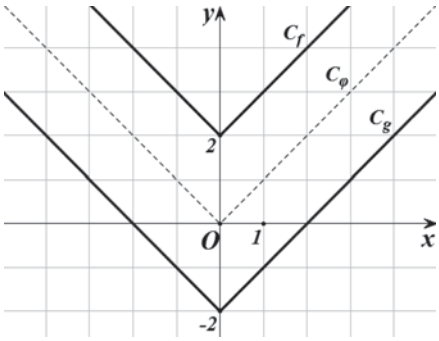
οπότε, $h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon = 2\left(-\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) \Leftrightarrow t = 2{,}4.$$

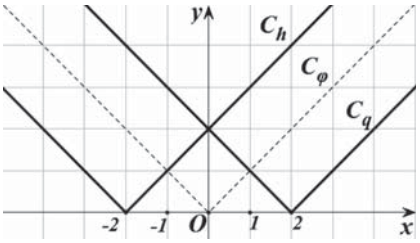
Παρατηρούμε δηλαδή ότι το k_2 θα έχει διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2{,}4h$, ανεξάρτητα του αρχικού ύψους υ των κεριών k_1 και k_2.

§ 6.4. Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

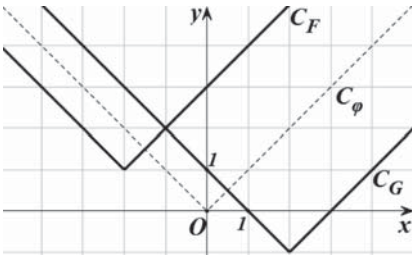
1. Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της h(x) = |x + 2| προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x|, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της q(x) = |x – 2| προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x|, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).

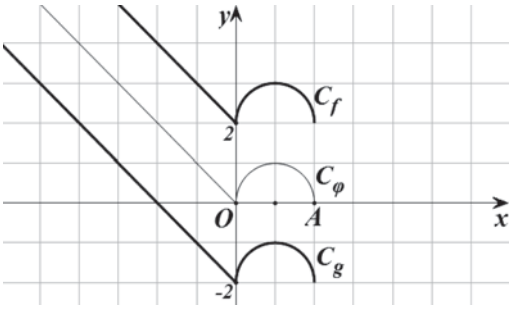


3. Αρχικά χαράσσουμε την y = |x + 2|, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x| κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την y = |x + 2| + 1, που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της y = |x + 2| κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της F(x) = |x + 2| + 1. προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της y = |x|, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδας προς τα πάνω (σχήμα).

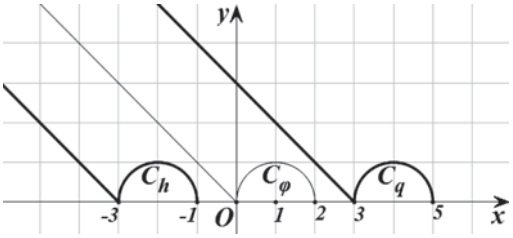


Ομοίως, η γραφική παράσταση της G(x) = |x – 2| – 1, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της y = |x|, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

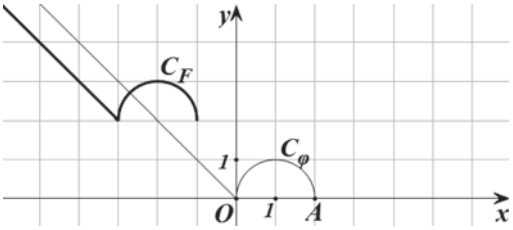
4. i)

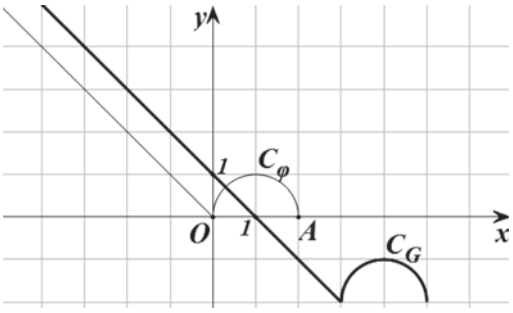


ii)



iii)





5. i) $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 + 1 = 2(x-2)^2$.
ii) $f(x) = 2(x-3)^2 - 1 - 2 = 2(x-3)^2 - 3$.
iii) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$.
iv) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1 - 2 = 2(x+3)^2 - 3$.

§ 6.5. Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
• Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
• Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2. • Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
• Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
• Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$, ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$. Έχουμε
$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$. Έχουμε
$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2,$$ που ισχύει.

4. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$, άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$, άρα η f_2 είναι άρτια.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_3(-x) = |-x + 1|$, οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού
$f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(-x)$, άρα η f_4 περιττή.

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.
$$f_5(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x},$$ άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x),$$ άρα f_6 είναι περιττή.

5. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει
$$f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$
Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το Ο. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_3(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

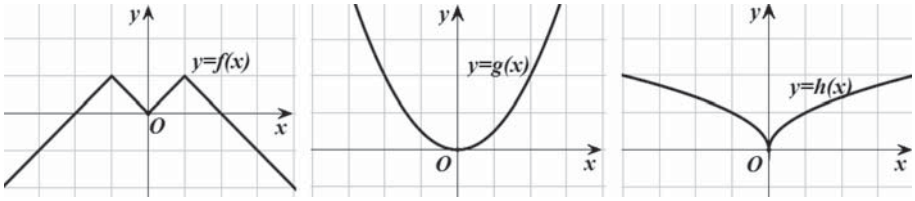
v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι $f_6(-x) = f_6(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

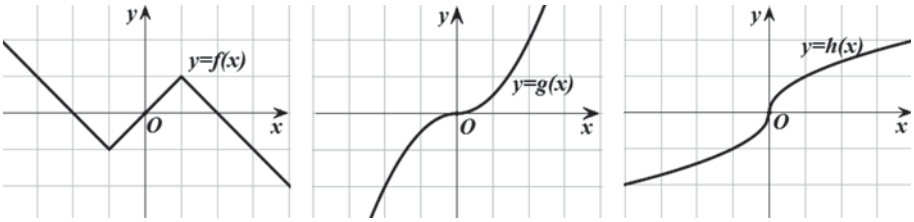
6. i) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η f είναι περιττή.
ii) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Άρα η g είναι άρτια.
iii) Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον y΄y, ούτε κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

7. Ομοίως
i) Η f είναι άρτια.
ii) Η g είναι περιττή.
iii) Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. α) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς τον άξονα y΄y.



β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



7 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f_1(x)=\alpha x^2, \qquad f_2(x)=\alpha x^3, \qquad f_3(x)=\frac{\alpha}{x} \quad \text{και} \quad f_4(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma .$$

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

3. Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της ("οριακές τιμές" κτλ.).

4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α είναι *άρτια*, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι *περιττή*, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης αρκεί να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$ και να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο σύνολο αυτό. Στη συνέχεια θα πάρουμε το συμμετρικό της καμπύλης που χαράξαμε ως προς τον άξονα $y'y$ αν η συνάρτηση είναι άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων αν η συνάρτηση είναι περιττή και θα βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα. Γι' αυτό, συνήθως, πριν προχωρήσουμε στα βήματα 2 έως 4, ελέγχουμε από την αρχή αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x) = \alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή, έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- ***Μονοτονία:*** Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα είναι $x_1^2 < x_2^2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- ***Ακρότατα:*** Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει:

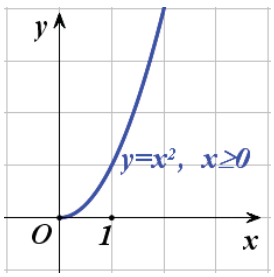
  $$g(x) = x^2 \geq 0 = g(0).$$

  Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο, το $g(0) = 0$.

- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

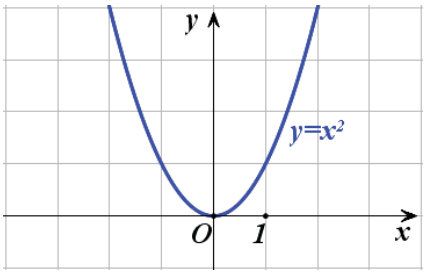
x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	$\ldots$	$\to +\infty$
$g(x) = x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	$\ldots$	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "**τείνει στο $+\infty$**", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "**τείνει στο $+\infty$**". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το $+\infty$.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα $y'y$, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$ σε όλο $\mathbb{R}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



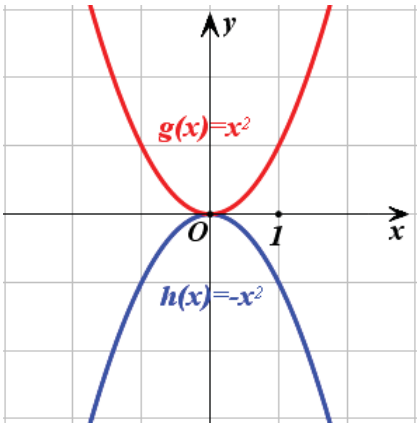
Η συνάρτηση $g(x)=x^2$:

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $g(0)=0$.
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$, είτε στο $+\infty$.

Η συνάρτηση $h(x)=-x^2$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=-x^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x)=-g(x)$$



Άρα, όπως μάθαμε στην §4.2, η γραφική παράσταση της $h(x)=-x^2$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=x^2$ ως προς τον άξονα $x'x$.

Επομένως η συνάρτηση $h(x)=-x^2$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$, το $h(0)=0$
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$ είτε στο $+\infty$.

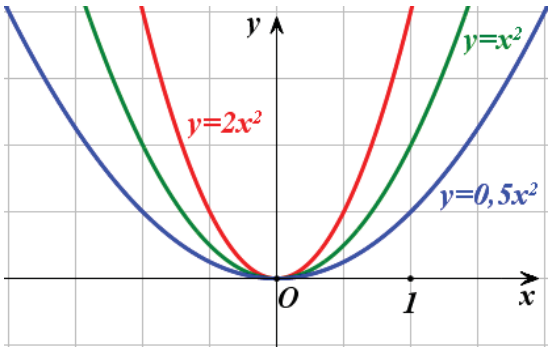
Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\alpha>0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x)=x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	0 **min**	↗ $+\infty$

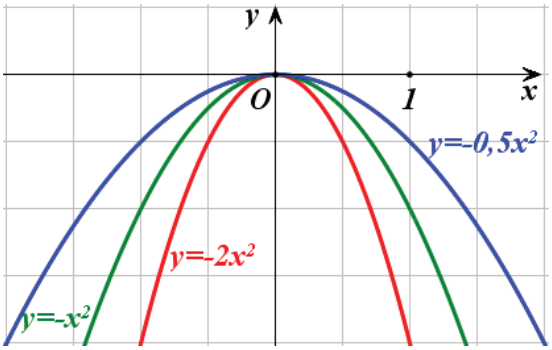
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$ για $\alpha=0,5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



- Αν $\boldsymbol{\alpha<0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x)=-x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty$ ↗	**max** 0	↘ $-\infty$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$ για $\alpha=-0,5$, $\alpha=-1$, $\alpha=-2$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων και **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

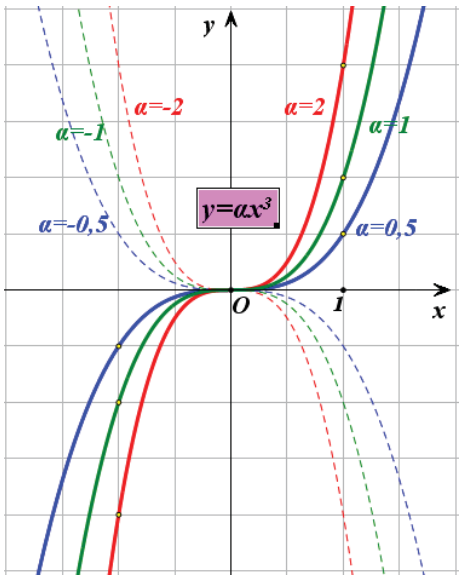
Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

- ✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.
- ✓ Καθώς η $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$.

ΛΥΣΗ



Η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$, είναι περιττή, διότι:

$$h(-x)=(-x)^3=-x^3=-h(x)$$

Επομένως, αρκεί να τη μελετήσουμε και να την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα για όλο το $\mathbb{R}$.

Αν εργαστούμε με τρόπο ανάλογο με εκείνο με τον οποίο εργαστήκαμε για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$:

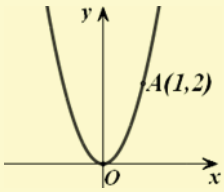
- Αν $\alpha > 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο $-\infty$.
- Αν $\alpha < 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=0,5x^2$, $f(x)=0,5x^2+2$ και $g(x)=0,5x^2-3$

ii) $\psi(x)=-0,5x^2$, $h(x)=-0,5x^2-2$ και $q(x)=-0,5x^2+3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=0,5x^2$, $f(x)=0,5(x-2)^2$ και $g(x)=0,5(x+2)^2$

ii) $\psi(x)=-0,5x^2$, $h(x)=-0,5(x-2)^2$ και $q(x)=-0,5(x+2)^2$.

4. **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x^2 \le 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=x|x|.$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$$

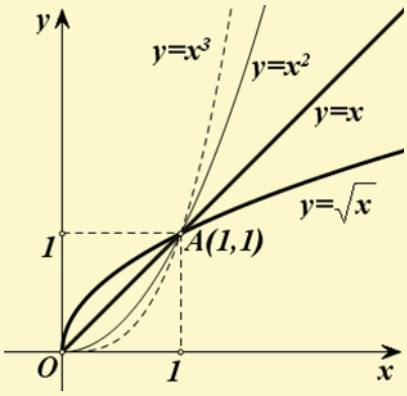
και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης *f*.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x)=x$, $g(x)=x^2$,

$h(x)=x^3$ και $\varphi(x)=\sqrt{x}$

στο διάστημα $[0,+\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.



i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές

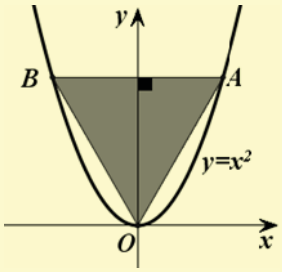
x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$

των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για $0<x<1$ και β) για $x>1$.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου *A*.



7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\frac{a}{x}$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι περιττή, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει :

$$g(-x)=\frac{1}{-x}=-g(x)$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό αρχικά θα τη μελετήσουμε και θα την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- ***Μονοτονία:*** Έστω τυχαία $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, οπότε θα έχουμε $g(x_1)>g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

- ***Πρόσημο των τιμών της g:*** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $g(x)=\frac{1}{x}>0$. Επομένως, στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της g θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

- ***Συμπεριφορά της g για "μικρές" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μικρές" τιμές του x:

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	.....	$\to 0$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	.....	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα και παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 ή, όπως λέμε, ***"τείνει στο 0"***, το $\frac{1}{x}$ αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "πλησιάζει" το 0 από τα δεξιά, η γραφική παράσταση της g τείνει να συ-

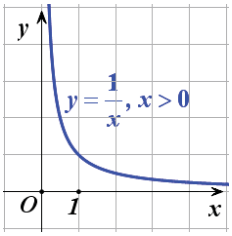
μπέσει με τον ημιάξονα Oy. Γι' αυτό ο άξονας $y'y$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα πάνω.

- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

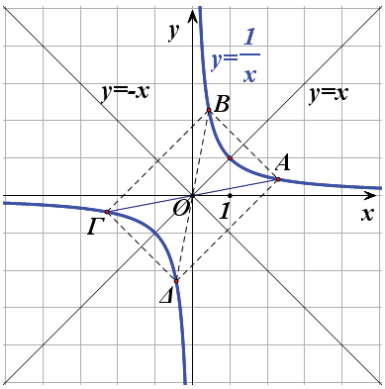
x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…….	$\to +\infty$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…….	$\to 0$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$, το $\frac{1}{x}$ μειώνεται απεριόριστα και ***τείνει στο 0.*** Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "απομακρύνεται" προς το $+\infty$, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Ox. Γι' αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα δεξιά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για θετικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $(0,+\infty)$.



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{1}{x}$ σε όλο το $\mathbb{R}^*$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$:

- Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1ο και έναν στο 3ο τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος

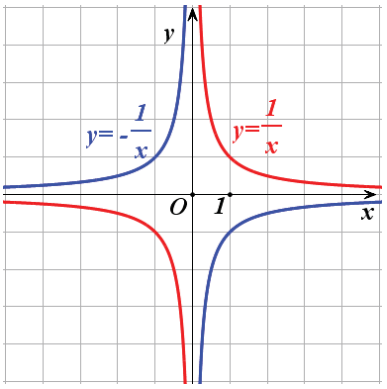
- ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x)=-g(x).$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της $h(x)=-\frac{1}{x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=\frac{1}{x}$ ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε, η συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$:



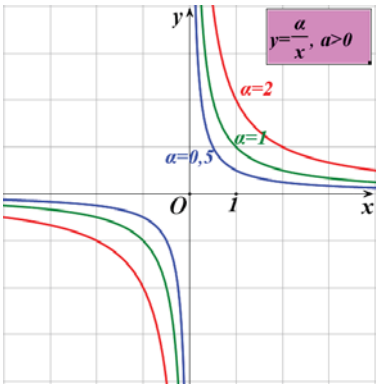
- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 2ο και έναν στο 4ο τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
  - ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

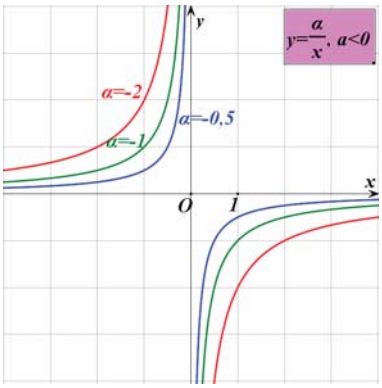
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\alpha>0$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

  Στο σχήμα α΄ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ για $\alpha=0,5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

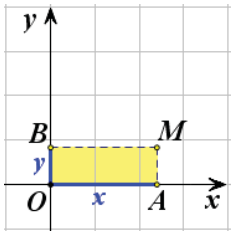
- Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

  Στο σχήμα β΄ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha = -0,5$, $\alpha = -1$ και $\alpha = -2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** με **κέντρο** την αρχή των αξόνων και **ασύμπτωτες** τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1ο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.

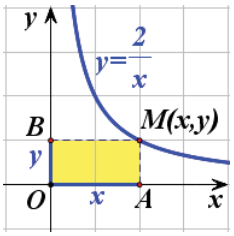


ΛΥΣΗ

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με 2τμ, θα ισχύει $xy = 2$ και $x, y > 0$, οπότε θα έχουμε:

$$y = \frac{2}{x}, \quad \text{με } x > 0$$

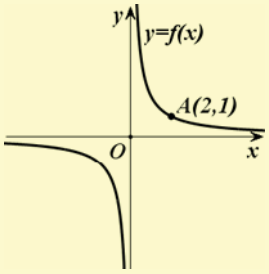
Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y = \dfrac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}-3$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{1}{x}-2$ και $q(x)=-\frac{1}{x}+3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}$ και $g(x)=\frac{1}{x+3}$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{1}{x-2}$ και $q(x)=-\frac{1}{x+3}$.

4. **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\le 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>1$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2$ και τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\le x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>x^2$$

6. Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

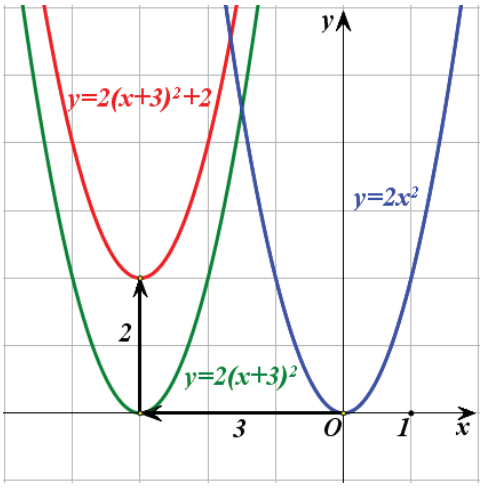
$$\begin{aligned} g(x) = 2x^2 + 12x + 20 &= 2\left(x^2 + 6x + 10\right) \\ &= 2\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10\right] \\ &= 2\left[(x+3)^2 + 1\right] \\ &= 2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x+3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g, χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x+3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2(x+3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x+3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

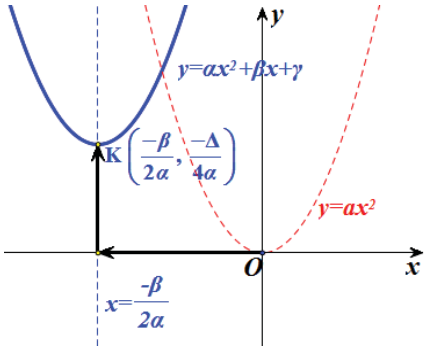
Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x+3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο $K(-3,2)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -3$.

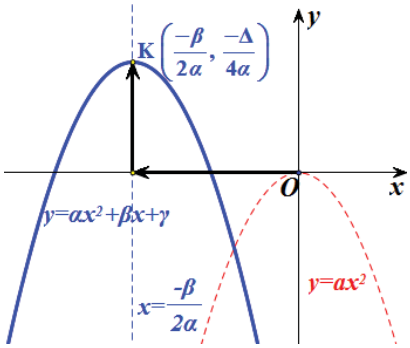


Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$. Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική της παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο $\mathbf{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $\boldsymbol{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$.





Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:

- Αν $\alpha>0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.
  - ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

- Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
  - ✓ Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

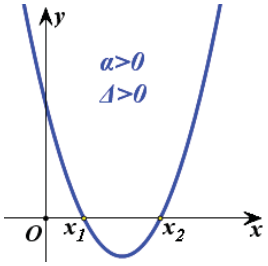
Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	$\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗	$\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max	↘ $-\infty$

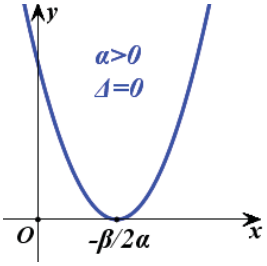
Τέλος η γραφική παράσταση της f είναι μια **παραβολή** που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,\gamma)$, διότι $f(0) = \gamma$, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ παρατηρούμε ότι:

- Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία, τα $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ (Σχ. α΄).
- Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ (Σχ. β΄).
- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ (Σχ. γ΄).

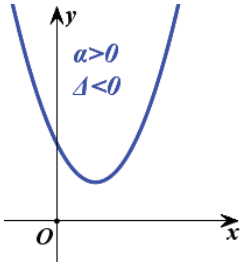
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



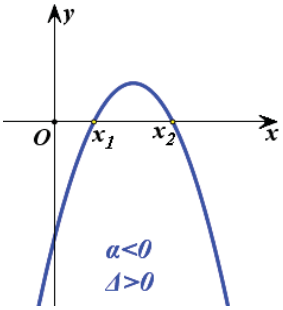
Σχήμα α΄



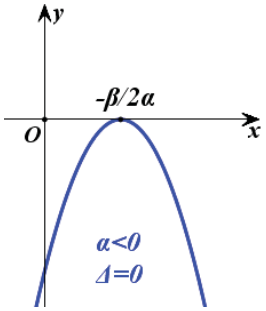
Σχήμα β΄



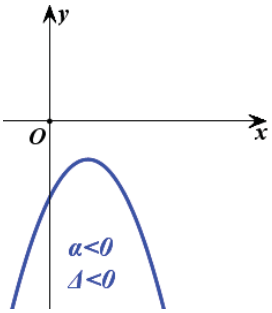
Σχήμα γ΄



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

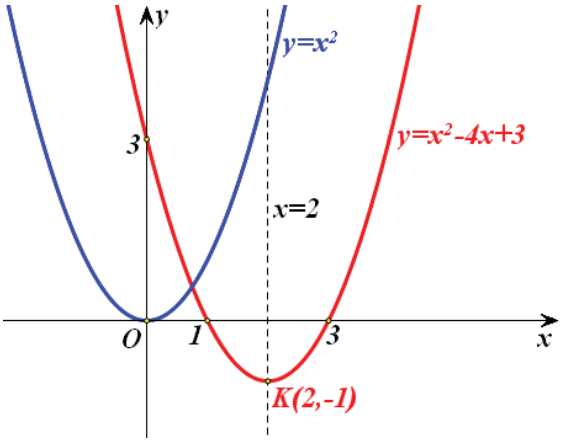
ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ είναι

$$\alpha = 1 > 0, \quad \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{-\Delta}{4\alpha} = f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = f(2) = -1,$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση *f*,

- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$,
- ✓ Παρουσιάζει για $x=2$ ελάχιστο, το $f(2)=-1$.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή η οποία:

- ✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ και
- ✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως, που είναι οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+5$ στη μορφή $f(x)=a(x-p)^2+q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της *f*.

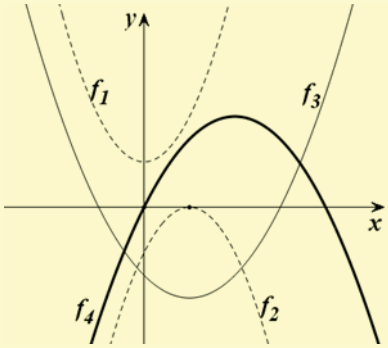
ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2+8x-9$, θεωρώντας ως g την $g(x)=-2x^2$.

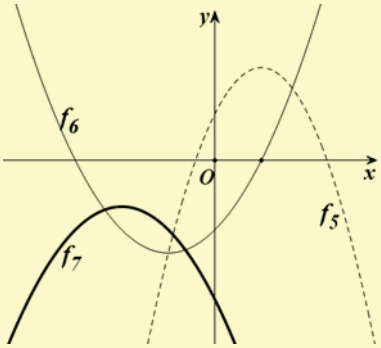
2. Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^2-6x+3$ και β) $g(x)=-3x^2-5x+2$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
α) $f(x)=2x^2+4x+1$ και β) $g(x)=-2x^2+8x-9$.

4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.





Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+						
β	0						
γ	+						
Δ	–						

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παραβολή $y=x^2+(k+1)x+k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή:

i) Εφάπτεται του άξονα $x'x$.

ii) Έχει τον $y'y$ άξονα συμμετρίας.

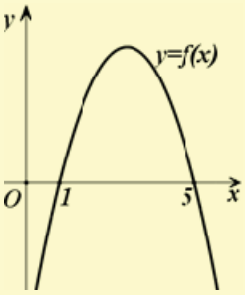
iii) Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να βρείτε:

i) Το πρόσημο του α.

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και

iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι $\beta=6$.

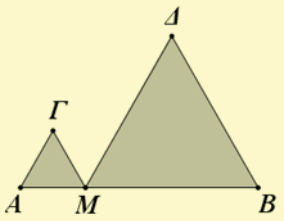


3. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ.

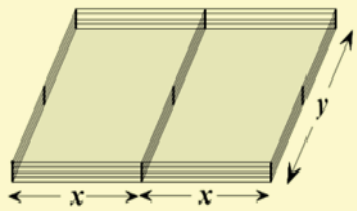
i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο $\mathrm{E} = f(x)$ που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = 5$ και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB} = 6cm$. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



5. Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα $200m$ και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν η παραβολή $y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, τότε βρίσκεται στο 3° και 4° τεταρτημόριο. Α Ψ

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$. Α Ψ

3. Για οποιουσδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ η παραβολή $y = \alpha x^2$ και η υπερβολή $y = \dfrac{\beta}{x}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο. Α Ψ

4. Η υπερβολή $y = \dfrac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x$ τέμνονται. Α Ψ

II. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x)=2x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=3$, τότε θα ισχύει:

$f(-5)\ldots 0$, $f(1)\ldots 0$, $f(5)\ldots 0$, $\gamma\ldots 0$ $\beta\ldots -4$.

2. Αν το τριώνυμο $f(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-3$ και $x_2=1$, θα ισχύει:

$f(-5)\ldots 0$, $f(-2)\ldots 0$, $f(5)\ldots 0$, $\gamma\ldots 0$, $\beta\ldots -2$.

III. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha=2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1,-3)$, τότε

Α) $f(x)=2(x-1)^2+3$ Β) $f(x)=2(x-1)^2-3$

Γ) $f(x)=2(x+1)^2+3$ Δ) $f(x)=2(x+1)^2-3$.

2. Αν $f(1)<0$, $f(3)>0$ και $f(5)<0$, τότε

Α) $\Delta=0$ και $\alpha>0$ Β) $\Delta>0$ και $\alpha>0$ Γ) $\Delta>0$ και $\alpha<0$.

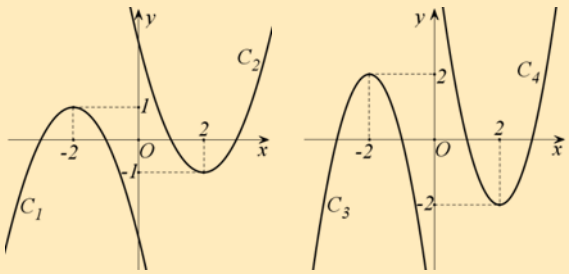
3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,2)$ και $\alpha>0$, τότε:

Α) $\Delta>0$ Β) $\Delta=0$ Γ) $\Delta<0$ Δ) $\gamma<0$.

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,0)$, τότε

Α) $\beta=0$ Β) $\Delta<0$ Γ) $\Delta>0$ Δ) $\Delta=0$.

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=x^2-4x+\gamma_1$, $f_2(x)=2x^2-8x+\gamma_2$, $f_3(x)=-x^2-4x+\gamma_3$ και $f_4(x)=-2x^2-8x+\gamma_4$, όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση.



f_1	f_2	f_3	f_4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 7.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

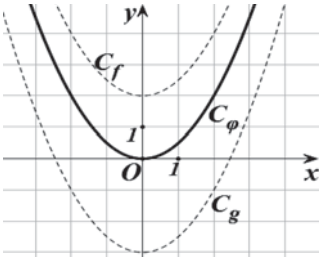
1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Άρα θα ισχύει $2 = \alpha \cdot 1^2 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

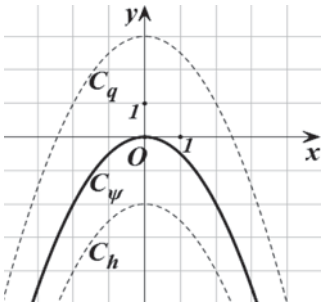
2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ.).

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ και $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



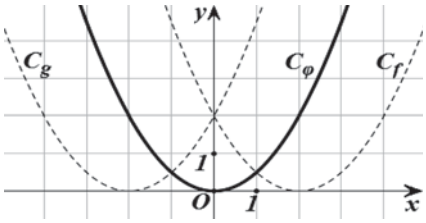
ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0{,}5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (σχ.).

Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $h(x) = -0{,}5x^2 - 2$ και $q(x) = -0{,}5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

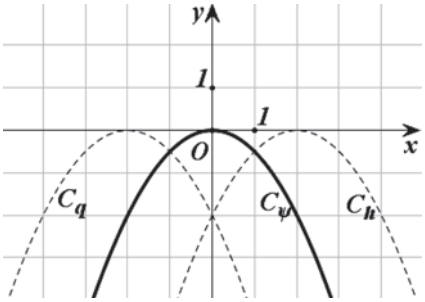


Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

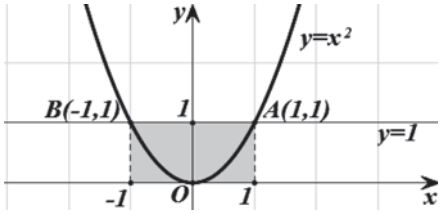
3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$ και $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.



ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0{,}5(x - 2)^2$ και $q(x) = -0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0{,}5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.



4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x) = x^2$ είναι η παραβολή $y = x^2$ του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία $y = 1$ του ίδιου σχήματος.



Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A(1, 1) και B(–1, 1) που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

Επειδή

$$x^2 \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $x^2 \le 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. Επομένως, θα έχουμε

$$x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

ii) Έχουμε

$x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

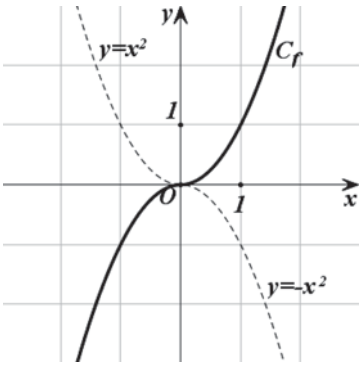
$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι

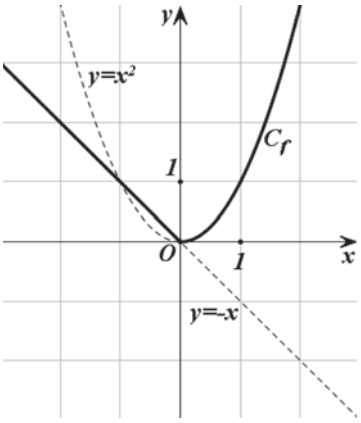
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y = -x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

2. Η γραφική παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y = -x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

Από τη γραφική παράσταση της f προσκύπτει ότι

- ✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ✓ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι

α) Στο διάστημα (0, 1) από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$. Επομένως, αν $x \in (0, 1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

β) Στο διάστημα $(1, +\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο. Επομένως αν $x \in (1, +\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε

- ✓ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

Άρα $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

- Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι η $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2), οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y΄y, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε
$(AB) = 2x$ και $(OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}$.

Επομένως, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$$(OA) = (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4$$
$$\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3,$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}\text{, διότι } x > 0.$$

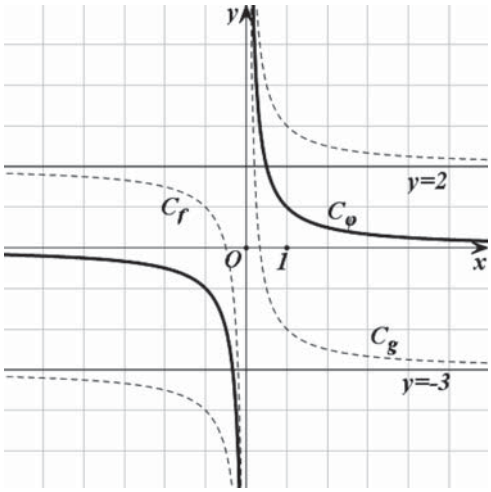
§ 7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2, 1), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως θα ισχύει $1 = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

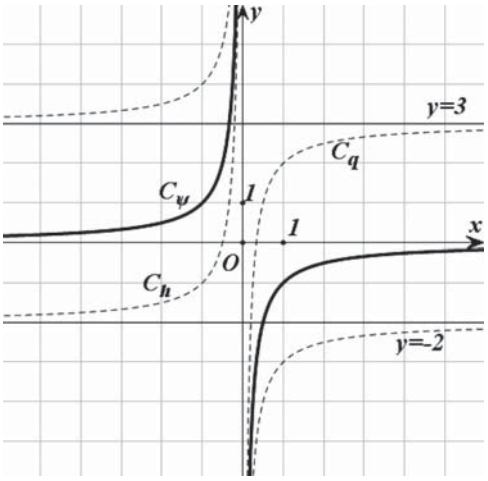
Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = \frac{2}{x}$.

2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 1° και 3° τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετα-



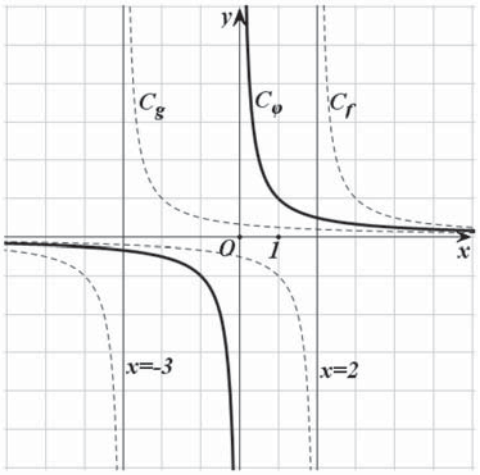
τόπιση της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 2° και 4° τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και $q(x) = -\frac{1}{x} + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



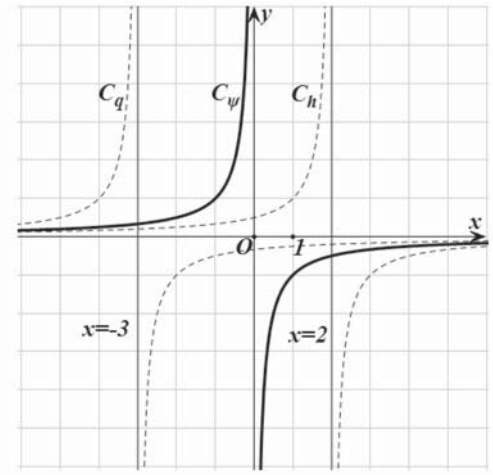
Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x+3}$, προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



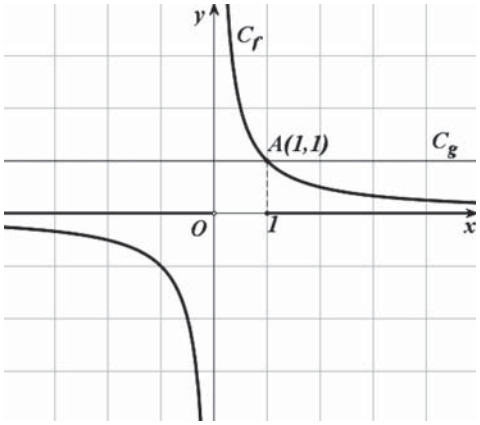
$y = \frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x-2}$ και $q(x) = -\frac{1}{x+3}$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



$y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

4. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο A(1, 1). Επομένως:



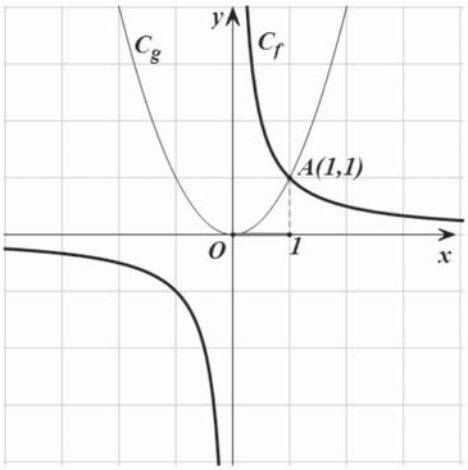
- $\frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$
- $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το A(1, 1). Επειδή



$\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$ και

$\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

η ανίσωση $\frac{1}{x} \le x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $\frac{1}{x} > x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.
Επομένως, θα έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$.
- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

ii) Έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x} \le 0$

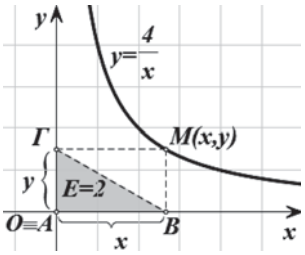
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

Επομένως

• $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε ΑΒ = ΟΑ = x > 0 και ΑΓ = ΟΓ = y > 0. Τότε το εμβαδό Ε του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε

$$\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}, \quad (1).$$



Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.

§ 7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε

$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε

$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

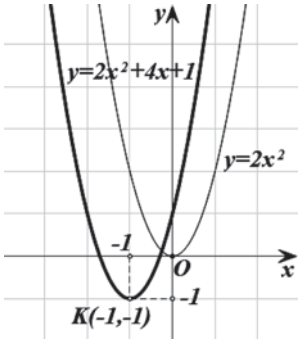
2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, το $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}$.

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$ είναι $\alpha = -3 < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-5}{6}, \text{ το } g\left(\frac{-5}{6}\right) = -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή



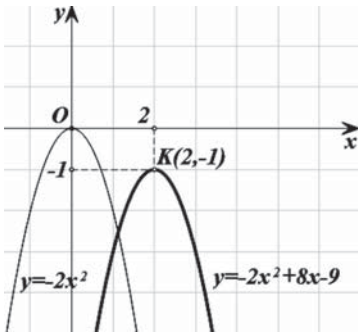
- ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για

  $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -1$, το $f(-1) = -1$.
- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και
- ✓ έχει κορυφή το σημείο $K(-1, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,
- ✓ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

  $A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ και $B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

  οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0, 1)$.

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $\alpha = -2 < 0$, οπότε αυτή



- ✓ Παρουσιάζει μέγιστο για

  $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$, το $g(2) = -1$
- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και
- ✓ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,
- ✓ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0, -9)$ ενώ, δεν τέμνει τον άξονα x΄x, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

4. Γνωρίζουμε ότι

i) Όταν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό α έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6, ενώ αρνητικό α έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7.

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με τον άξονα y΄y. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5, αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7, ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4.

iii) Η τεταγμένη της κορυφής Κ της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δίνεται από τον τύπο $x_K = \frac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε ισχύει $\beta = -2\alpha \cdot x_K$. Επομένως

✓ για την f_2 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_3 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta < 0$,
✓ για την f_4 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_5 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_6 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta > 0$, και
✓ για την f_7 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	–	+	–	–	+	–
β	0	+	–	+	+	+	–
γ	+	–	–	0	+	–	–
Δ	–	0	+	+	+	+	–

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του x΄x μόνο αν είναι $\Delta = 0$.
Δηλαδή $(k + 1)^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0$
$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$

ii) Η παραβολή έχει τον y΄y άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y΄y, δηλαδή αν και μονο αν $\frac{-\beta}{2\alpha} = 0$. Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο $K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right)$.

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4$, που διαδοχικά γράφεται

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k = -4 \Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16$$
$$\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.
• Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
• Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $\alpha < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία A(1, 0) και B(5, 0), το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$.
Άρα είναι $\Delta > 0$.

iii) Επειδή $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $\beta = 6$, θα έχουμε $1 + 5 = \frac{-6}{\alpha}$, οπότε θα είναι $\alpha = -1$.

Τέλος, επειδή $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, θα έχουμε $1 \cdot 5 = \frac{\gamma}{-1}$, οπότε θα είναι $\gamma = -5$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$, θα είναι της μορφής $\rho(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha(x - 1)(x - 5) = \alpha x^2 - 6\alpha x + 5\alpha$.
Επομένως θα είναι $\beta = -6\alpha$ και επειδή $\beta = 6$, θα έχουμε $\alpha = -1$.
Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει $2(x + y) = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.
Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο f(x). Αυτό συμβαίνει όταν $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-10}{-2} = 5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x = 5$ είναι και $y = 5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με

$$f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25.$$

4. Αν θέσουμε (ΑΜ) = x, τότε θα είναι (ΜΒ) = 6 – x (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε.

$$\upsilon_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}, \text{ οπότε } \upsilon_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

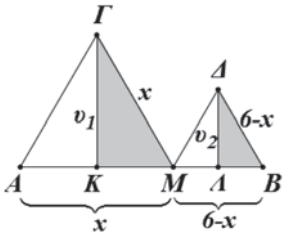
Ομοίως από το τρίγωνο ΛΔΒ παίρνουμε $\upsilon_2 = \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(AM)(K\Gamma) + \frac{1}{2}(MB)(\Lambda\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x)\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)^2$$



Άρα $E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$, με $0 \le x \le 6$. (1)

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν Ε είναι ελάχιστο για την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $\alpha = 1 > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3.$$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

5. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει

$$2x + 2x + 3y = 240 \Leftrightarrow 4x + 3y = 240 \Leftrightarrow y = \frac{240 - 4x}{3}. \quad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E = 2xy = 2x\left(\frac{240 - 4x}{3}\right) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x. \quad (2)$$

Για τη συνάρτηση $E(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x$ είναι $\alpha = -\frac{8}{3} < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-160}{\frac{-16}{3}} = 30$.

Τότε από την (1) παίρνουμε $y = \frac{240 - 4 \cdot 30}{3} = 40$.

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι x = 30m και y = 40m.